ANÁLISIS DE FOURIER APLICADO A CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

Mamani, Verónica Natalia
Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Nataliam90@gmail.com
Agosto 2014

Resumen: en el área de la electrónica existen ciertos aspectos a tener en cuenta al momento de diseñar circuitos eléctricos, como las formas de onda de las señales que hacen de fuente de alimentación para los mismos. Los generadores de potencia ideales tienen que proporcionar sinusoides puras, sin embargo tienen interés práctico muchas excitaciones que no son sinusoidales sino variables distorsionadas de señales sinusoidales pero igualmente periódicas.
En este informe se muestra como el análisis de Fourier permite tratar cualquier función periódica como una suma infinita de funciones sinusoidales relacionadas armónicamente.

Palabras clave: circuitos eléctricos, formas de onda no sinusoidales, análisis de Fourier.

I. INTRODUCCIÓN

Una función periódica puede expresarse como serie de Fourier en la forma:

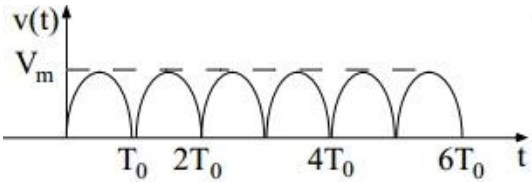
$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kw_0 t) + b_k \sin(kw_0 t)]$$

Siendo:

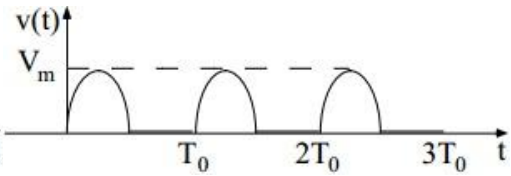
k: número natural.
a_v , a_k , b_k: coeficientes de Fourier.
$w_0 = 2\pi/T_0$: frecuencia angular fundamental.
kw_0: frecuencia de la componente armónica de orden k.

$f(t)$ se expresa como la suma de una componente continua y diversas componentes sinusoidales.
Si representa la excitación de un circuito, la salida de éste puede ser calculada aplicando el principio de superposición.

Ejemplos de funciones periódicas:

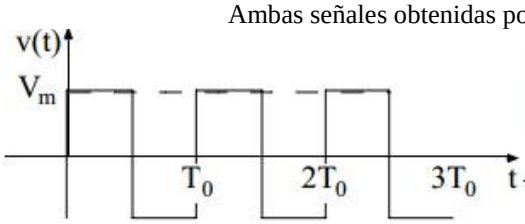


Rectificación de onda completa.

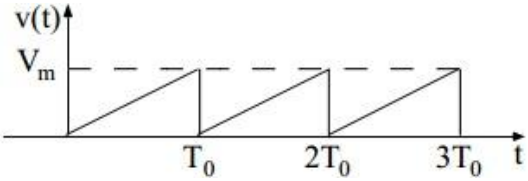


Rectificación de media onda.

Ambas señales obtenidas por saturación de transistores.



Onda cuadrada.



Onda triangular.

Señales proporcionadas por generadores de ondas.

Para que una función pueda ser expresada como serie de Fourier, ha de cumplir las condiciones de Dirichlet:

- F(t) tiene un valor único para cualquier valor de t.
- F(t) tiene un numero finito de discontinuidades en el intervalo de un periodo.
- F(t) tiene un numero finito de máximos y mínimos en el intervalo de un periodo.
- La integral $\int_{t0}^{to+T0} |f(t)|\, dt$ existe.

Las condiciones de Dirichlet son suficientes, pero no necesarias. No se sabe cuáles son las condiciones necesarias. Una función puede no cumplir las condiciones de Dirichlet y ser expresable como serie de Fourier.

II. Determinación de los coeficientes de Fourier.

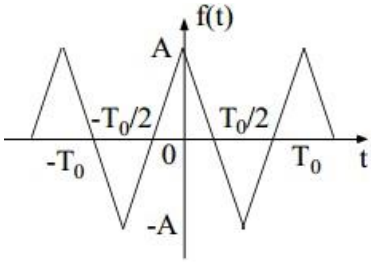
$a_v = \frac{1}{T_0}\int_{t0}^{t0+T0} f(t)\, dt$ $\qquad a_k = \frac{2}{T_0}\int_{t0}^{t0+T0} f(t)\cos(kw_0 t)\, dt$ $\qquad b_k = \frac{2}{T_0}\int_{t0}^{t0+T0} f(t)\sin(kw_0 t)\, dt$

t0 es cualquier valor de tiempo elegido arbitrariamente.

Obsérvese que a_v es el valor medio de f(t) en un periodo, lo cual proporciona un medio alternativo de calcular este coeficiente.

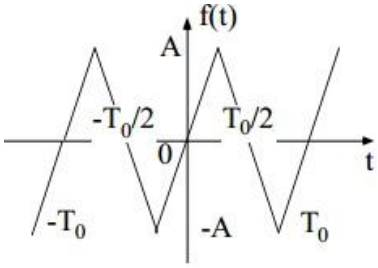
III. Casos particulares de funciones.

Simetría par: $f(t) = f(-t)$



$a_v = \frac{2}{T_0}\int_0^{T0/2} f(t)\, dt$ $\qquad a_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T0/2} f(t)\cos(kw_0 t)\, dt$ $\qquad b_k = 0$

Simetría impar: $f(t) = -f(-t)$



$a_v = 0$ $\qquad a_k = 0$ $\qquad b_k = \frac{4}{T_0}\int_0^{T0/2} f(t)\sin(kw_0 t)\, dt$

A una función periódica dada se la puede dotar de simetría par o impar con sólo elegir adecuadamente el origen de tiempos.

IV. Forma trigonométrica de la serie de Fourier

$$A_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2} \qquad \varphi_k = \tanh^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

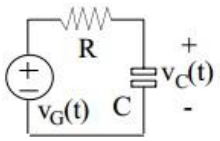
$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kw_0 t) + b_k \sin(kw_0 t)] = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kw_0 t - \varphi_k)$$

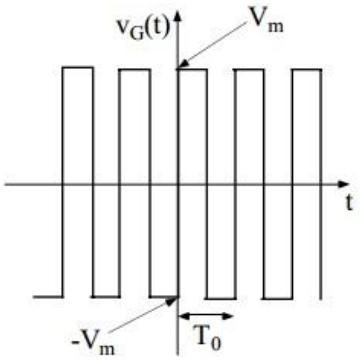
Los términos en seno y coseno de cada armónico de la serie se combinan en un único término de tipo sinusoidal, lo cual permite tratar la función como una superposición de una componente continúa y una suma se señales sinusoidales de distintas frecuencias.

Obsérvese que:

Si f(t) par → $A_k = a_k, \quad \varphi_k = 0°$
Si f(t) impar → $A_k = b_k, \quad \varphi_k = 90°$

V. Ejemplo de aplicación de un circuito.





Dado el circuito de la figura, sometido a la excitación indicada, se desea obtener la expresión temporal de $V_C(t)$

La excitación tiene simetría impar en media onda y en cuarto de onda, con lo que:

$$a_v = 0$$
$$a_k = 0$$
$$b_k = 0, k\ par$$
$$b_k = \frac{8}{T_0}\int_0^{T0/4} V_m \sin(kw_0 t)\, dt = \frac{4V_m}{\pi k}, k\ impar$$

Y puede ser expresada como serie de Fourier con formulación trigonométrica:

$$V_G(t) = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos[(2i-1)w_0 t - 90°]}{2i-1}$$

Es equivalente a un número infinito de fuentes sinusoidales conectadas en serie.

Se aplica el principio de superposición teniendo en cuenta que para cada excitación individual y utilizando notación fasorial se cumple:

$$V_C = \frac{V_G}{1 + jwRC}$$

Aplicando este resultado a cada componente de la excitación los fasores de las distintas respuestas individuales están dados por:

Primer armónico (i=1)

$$V_{C1} = \left[\frac{4V_m}{\pi\sqrt{1 + (w_0RC)^2}}\right]_{<-90°-\theta_1}, \qquad \theta_1 = \tan^{-1}(w_0RC)$$

Tercer armónico (i=3)

$$V_{C3} = \left[\frac{4V_m}{\pi\sqrt{1 + (3w_0RC)^2}}\right]_{<-90°-\theta_3}, \qquad \theta_3 = \tan^{-1}(3w_0RC)$$

Generalizando, puede deducirse que la respuesta pedida es:

$$V_C(t) = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos[(2i-1)w_0t - 90° - \theta_{2i-1}]}{(2i-1)\sqrt{1 + [(2i-1)w_0RC]^2}}, \qquad \theta_{2i-1} = \tan^{-1}[(2i-1)w_0RC]$$

Observaciones:

C muy grande (cortocircuito) → $\theta_{2i-1} \approx 90°$→ $V_C(t) \approx -\frac{4V_m}{\pi w_0RC}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos[(2i-1)w_0t]}{(2i-1)^2}$

Los armónicos de salida decrecen en amplitud en la proporción 1/i2, mientras que los de la entrada lo hacen en la proporción 1/i (hay gran distorsión -distorsión de fase-).

C muy pequeño (circuito abierto) → $\theta_{2i-1} \approx 0°$ → $V_C(t) \approx V_G(t)$. Poca distorsión.

VI. Conclusión.

Esta nota de aplicación se desarrolló con la finalidad de ofrecer al lector un método para determinar la respuesta de un circuito excitado por una señal de entrada periódica. Del ejemplo de aplicación anterior queda demostrado entonces que mediante el uso de series de Fourier se puede representar a $V_G(t)$ (señal de entrada) como una suma de sinusoides sencilla para que luego, aplicando el teorema de superposición, pueda encontrarse finalmente la respuesta del circuito a la frecuencia fundamental y a cada armónico.

Referencias.

[1] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier [acceso el 20 de agosto de 2014].

[2] Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja, 2013.

[3] Joseph A. Edminister. Circuitos Eléctricos, Mc Graw-hill, 1985

[4] Monografias.com, [internet], disponible en http://www.monografias.com/trabajos32/teoria-circuitos/teoria-circuitos.shtml [acceso el 20 de agosto de 2014].