Transformada Zeta
Aplicación: Filtros digitales

Luciano Andrés Cardozo

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Lucianocardozo7@gmail.com
Diciembre 2010

Resumen: la transformada Z es una herramienta muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales que siempre están presentes en la resolución de casi cualquier circuito eléctrico.

Esta nota se centra en el cálculo de la transformada z para la obtención de la función transferencia para modelar filtros digitales. Estos filtros tienen innumerables aplicaciones ingenieriles en el ámbito de las comunicaciones, sonidos, procesamientos, etc.

Palabras clave: transformada z, filtros digitales, invariancia, causalidad, linealidad, función transferencia, ceros, polos.

I. INTRODUCCIÓN

Con la llegada de las computadoras digitales, rápidas y baratas, se ha renovado el énfasis en el análisis y diseño de sistemas digitales, que representan una clase importante de sistemas en ingeniería.

Gran parte del ímpetu inicial del cálculo finito se debió a la necesidad de llevar a cabo interpolaciones y aproximar derivadas e integrales. Más tarde, se inventaron métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales, muchos de los cuales se basaron en los métodos de diferencias finitas al aproximar las derivadas para obtener una ecuación en diferencias.

Los sistemas digitales operan con señales digitales, que generalmente son generadas por muestreo de una señal en tiempo continuo, esto es, una señal definida en cada instante en un intervalo de tiempo posiblemente infinito. El proceso de muestreo genera una señal de tiempo discreto, definida solo en los instantes en que el muestreo se lleva a cabo de tal manera que se genera una sucesión digital. Después de procesarla con una computadora, la señal digital de salida puede usarse para construir una nueva señal de tiempo continuo, por ejemplo utilizando un dispositivo de muestreo y retención, y ésta a su vez, puede usarse para controlar una fábrica o un proceso.

Estas tareas pueden ser realizadas mediante la transformada Z, que es una valiosa ayuda en el análisis de sistemas de tiempo discreto.

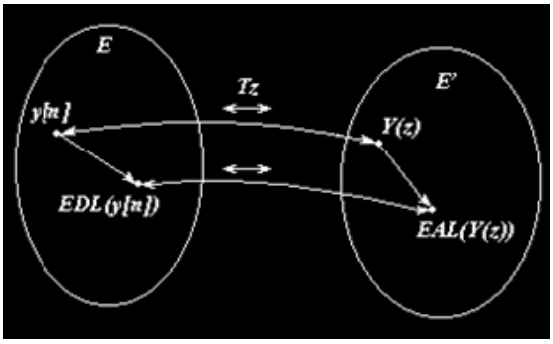


Figura1: transformada z entre un espacio de sucesiones y un espacio de funciones analíticas

II. TRANSFORMADA Z

A. ¿Qué es la transformada Z?

La Transformada Zeta es una aplicación entre un espacio de sucesiones (funciones discretas) y un espacio de funciones analíticas.

La función que los liga es la serie de Laurent cuyos coeficientes son los elementos de la sucesión de origen.

La importancia del modelo de la Transformada Zeta radica en que permite reducir ecuaciones en diferencias o ecuaciones recursivas con coeficiente constantes a ecuaciones algebraicas lineales.

$a_0.y[n] + a_1.y[n-1] + \cdots + a_k.y[n-k] = x[n]$	Ecuaciones en Diferencias
$Y(z)[a_0 + a_1.z^{-1} + \cdots + a] = X(z)$	Ecuaciones Algebraicas Lineales

B. Definición y notación

La transformada z de una sucesión $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ está definida, en general, como

$$£\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$$

Siempre que exista la sumatoria y donde z es una variable compleja.

El proceso de aplicar la transformada z a una sucesión produce una función de variable compleja z, cuya forma depende de la propia sucesión x_k.

Para sucesiones $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ que son causales, esto es,

$$x_k = 0 \qquad (k < 0),$$

la transformada z se reduce a

$$£\{x_k\}_{0}^{\infty} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$$

C. Región de convergencia

En la expresión de la transformada z aparece una sumatoria cuyos limites son $\pm\infty$. Ésta sumatoria puede converger o no para determinados valores de la variable compleja z.

Definimos la región de convergencia, de una transformada z, a la región del plano complejo donde la transformada z converge.

Ejemplo:

Determinar la transformada z de la sucesión

$$\{x_k\} = 2^k \qquad (k \geq 0)$$

Solución:

$$£\{2^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

que reconocemos como una serie geométrica de razón $r = {}^{2}/_{z}$. Así la serie converge para$|z| > 2$, cuando

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\frac{1-\left(2/z\right)^k}{1-2/z} = \frac{1}{1-2/z}$$

llegando a

$$£\{\mathbf{2^k}\} = \frac{z}{z-2} \qquad (|\boldsymbol{z}| > \mathbf{2}) \rightarrow \text{Región de convergencia}$$

D. Propiedades de la transformada z

Linealidad

Si $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ son sucesiones que tienen transformada z $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ respectivamente y si α y β son constantes reales o complejas cualesquiera, entonces

$$£\{\alpha x_k + \beta y_k\} = \alpha £\{x_k\} + \beta £\{y_k\} = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

Traslación (retraso)

Si $\{x_k\}$ es una sucesión que tiene transformada z $\{x_k\}$ y siendo k_0 el número de pasos en el retardo, entonces

$$£\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}}.£\{x_k\}$$

Traslación (adelanto)

Si $\{x_k\}$ es una sucesión que tiene transformada z $\{x_k\}$ y siendo k_0 el número de pasos en el adelanto, entonces

$$£\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0}X(z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n.z^{k_0-n}$$

Multiplicación por a^k

Si $Z\{x_k\} = X(z)$ entonces para una constante a.

$$£\{a^k x_k\} = X(a^{-1}z)$$

Multiplicación por k^n

Si $£\{x_k\} = X(z)$ entonces para un entero positivo n

$$£\{k^n x_k\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n X(z)$$

Teorema del valor inicial

Si $\{x_k\}$ es una sucesión cuya transformada z es $X(z)$ entonces el teorema de valor inicial establece que

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0$$

Teorema del valor final

Si $\{x_k\}$ es una sucesión con transformada z $X(z)$ entonces el teorema del valor final establece que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$$

siempre que los polos de $(1 - z^{-1})X(z)$ estén dentro del circulo unitario.

E. Tabla de transformadas z

$\{\boldsymbol{x_k}\}$ $(\boldsymbol{k \geq 0})$	$\pounds\{\boldsymbol{x_k}\}$	**Región de existencia**
$x_k = \begin{cases} 1 \; si \; (k = 0) \\ 0 \; si \; (k > 0) \end{cases}$ (Sucesión de pulso unitario)	1	Todo z
$x_k = 1$ (Sucesión escalón unitario)	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$x_k = a^k$ $(a \; constante)$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$x_k = k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$x_k = ka^{k-1}$ $(a \; constante)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > a$
$x_k = e^{-kT}$ $(T \; constante)$	$\frac{z}{z-e^{-T}}$	$\lvert z\rvert > e^{-T}$
$x_k = \cos(k\omega T)$ $(\omega, T \; constantes)$	$\frac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$x_k = \sin(k\omega T)$ $(\omega, T \; constantes)$	$\frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$

F. Transformada z inversa

La transformada z inversa consiste en recuperar una sucesión causal $\{x_k\}$ a partir del conocimiento de $X(z)$, su transformada z.

Formalmente el símbolo $\pounds^{-1}[X(z)]$ indica una sucesión causal $\{x_k\}$ cuya transformada z es $X(z)$; esto es,

$$\text{Si } \pounds\{x_k\} = X(z) \text{ entonces } \{x_k\} = \pounds^{-1}[X(z)].$$

Métodos de transformación inversa:

Método I (Descomposición en fracciones)

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

Se descompone $X(z)$ en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)}$$

así que

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-1)}$$

entonces usando el resultado $\pounds^{-1}\left[{}^{z}/_{(z-a)}\right] = \{a^k\}$ junto con la propiedad de linealidad, tenemos

$$£^{-1}[X(z)] = £^{-1}\left(\frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-1)}\right) = £^{-1}\left(\frac{z}{(z-2)}\right) - £^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)}\right) = \{2^k\} - \{1^k\} \qquad (k \geq 0)$$

así que

$$\boldsymbol{£^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right] = \{2^k - 1\} \qquad (k \geq 0)}$$

Método II (Expansión en potencias de z)

La estrategia consiste en expandir la transformada z en una serie de potencias de z, para igualar esta expansión a la definición de transformada z.

$$X(z) = e^{-z^{-1}}$$

El teorema de Taylor nos asegura que podemos descomponer cualquier función $f(x)$ usando sus derivadas n-ésimas en el origen de la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

sabiendo que

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

tenemos

$$e^{-z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k}$$

y por definición

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$$

entonces

$$\boldsymbol{£^{-1}\left[e^{-z^{-1}}\right] = \{x_k\} = \frac{(-1)^k}{k!}}$$

III. Aplicación a la transformada z

Usando la transformada z, un filtro digital puede ser caracterizado mediante una función transferencia discreta en el tiempo.

G. Características de los filtros digitales:

Los filtros digitales deben cumplir con las siguientes propiedades:

- Invariancia en el tiempo
- Causalidad
- Linealidad

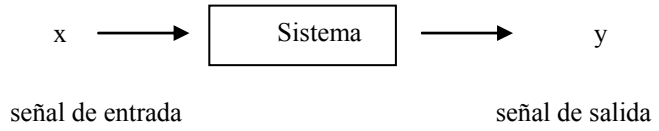


Figura 2: Representación de la relación entrada/salida de un sistema

Invariancia en el tiempo

Un filtro digital es invariante en el tiempo si su comportamiento y sus características son fijas. Es decir un desplazamiento temporal en la entrada $x(t-t0)$ ocasiona un desplazamiento temporal en la salida $y(t-t0)$.

Causalidad

Para que un filtro sea causal, su salida en un instante dado no puede depender de valores posteriores de la excitación.

Linealidad

Un filtro digital es lineal si comprueba $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$

H. Obtención de la función transferencia ($H(z)$)

Una función de transferencia es un modelo matemático que a través de un cociente relaciona la respuesta de un sistema a una señal de entrada o excitación. Matemáticamente podemos decir que la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente de la transformada z de la salida y la transformada z de la entrada.

La ecuación en diferencias de un filtro IIR (Respuesta al Impulso Infinita) es

$$a_0x[n]+a_1x[n-1]+a_2x[n-2]+\cdots+a_Nx[n-N]=$$
$$=b_0y[n]+b_1y[n-1]+b_2y[n-2]+\cdots+b_My[n-M]$$
$$y(n)=\sum_{i=0}^{N}a_ix(n-i)-\sum_{j=1}^{M}b_jy(n-j)$$

Que tomando transformada z en ambos miembros se obtiene la función transferencia $H(z)$

$$Y(z)=X(z)\sum_{i=0}^{N}a_iz^{-i}-Y(z)\sum_{j=1}^{M}a_jz^{-j}$$
$$Y(z)\left(1+\sum_{j=1}^{M}a_jz^{-j}\right)=X(z)\sum_{i=0}^{N}a_iz^{-i}$$

Como $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M} a_j z^{-j}} = factoreando = \frac{H_0 \prod_{i=0}^{N}(z - z_i)}{\prod_{j=1}^{M}(z - p_j)}$$

Donde z_i son los ceros y p_j son los polos.

Existe una relación directa entre los polos de la transformada z y el tipo de señal que da lugar a dicha transformada, como se muestra en las figuras 3, 4 y 5.

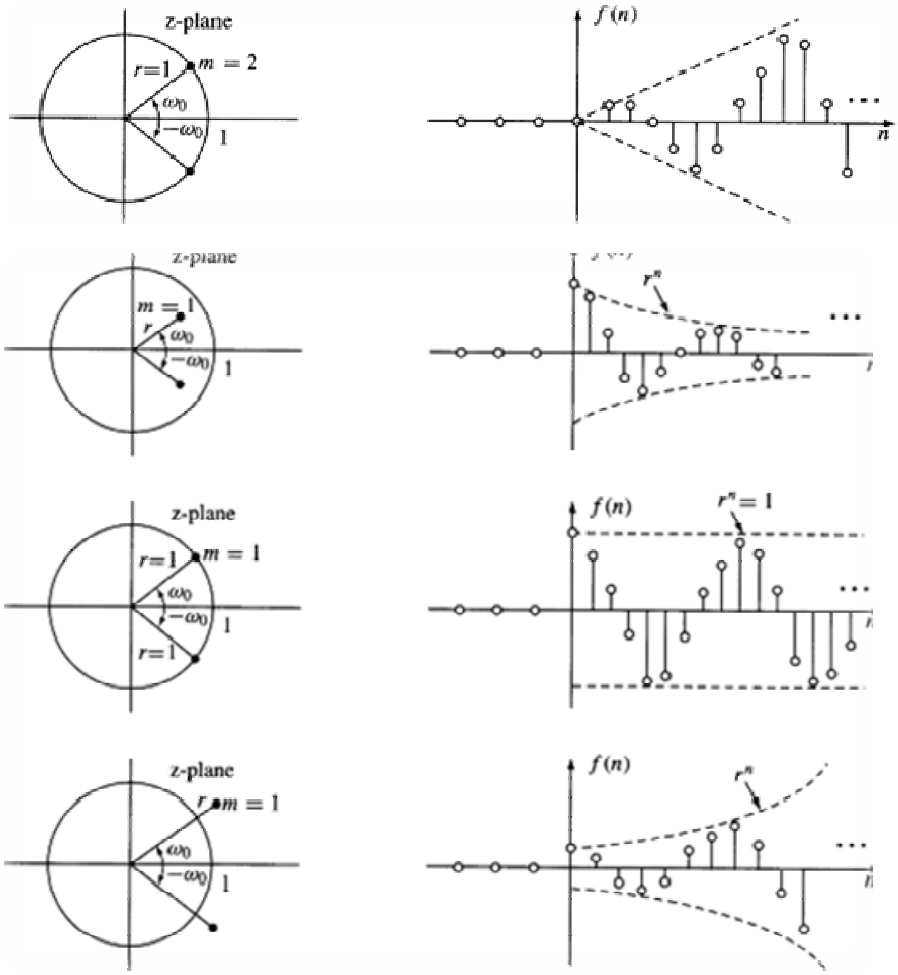


Figura 3: Señales causales – polos conjugados complejos

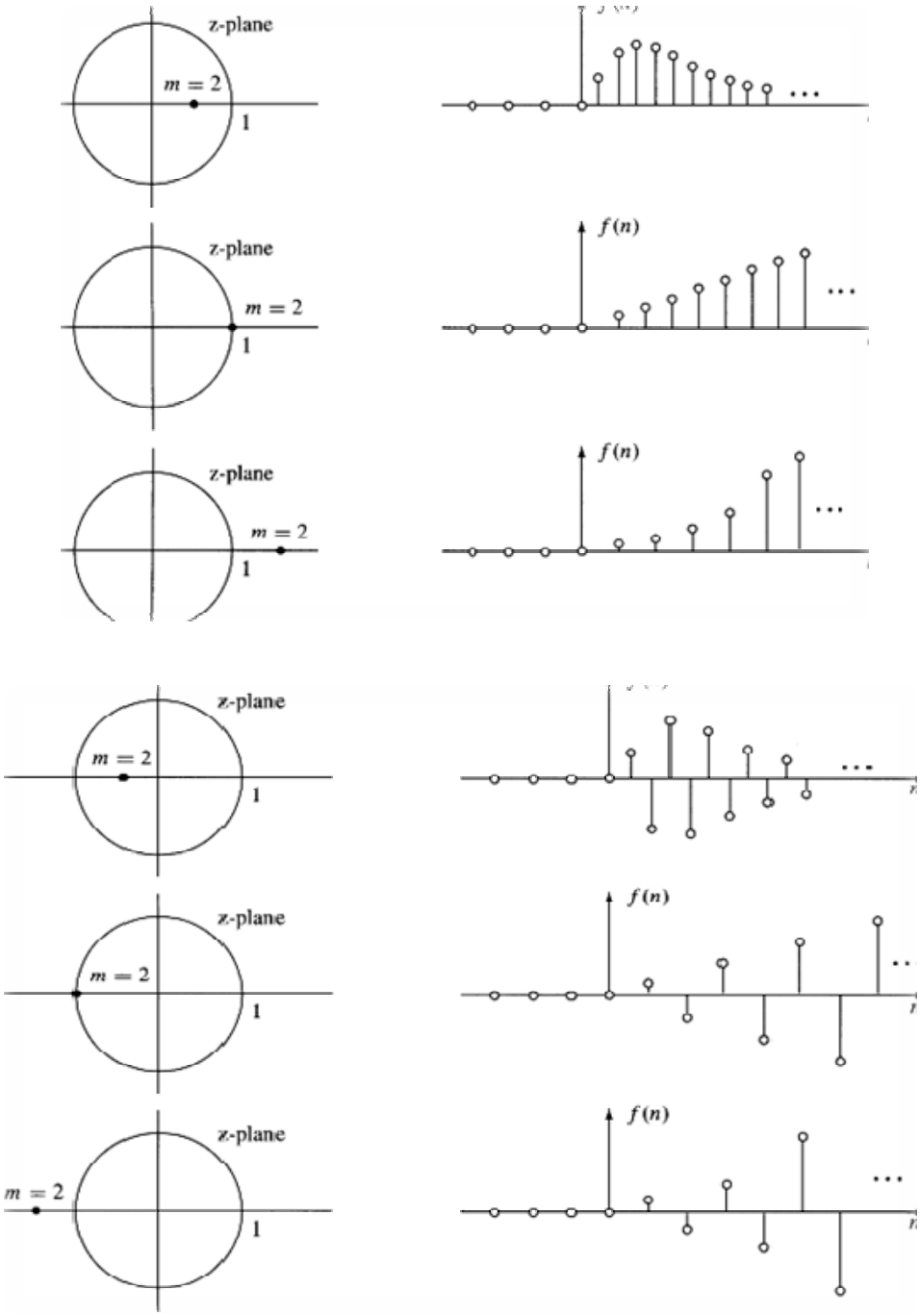
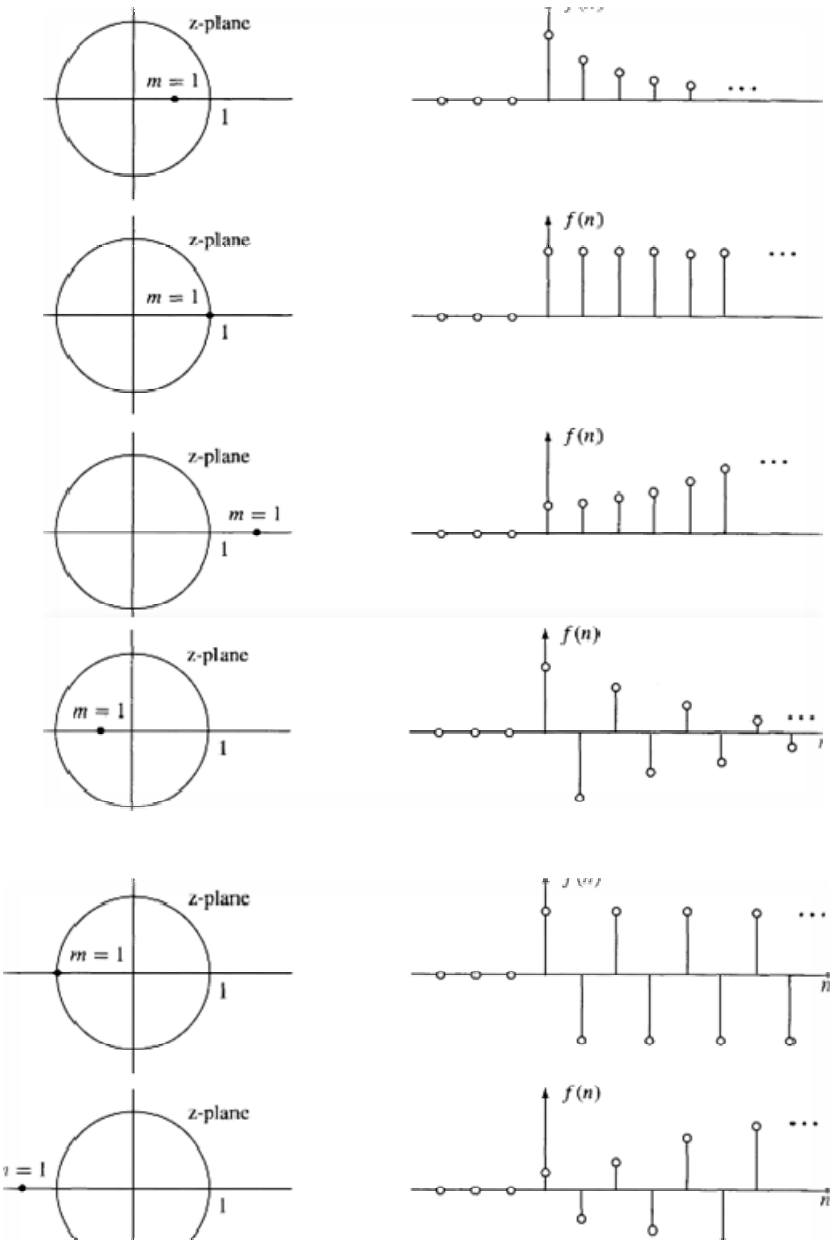


Figura 4: señales causales – polos reales dobles



IV. Conclusión

La importancia del modelo de la Transformada Zeta está en que permite reducir ecuaciones en diferencias o ecuaciones recursivas con coeficiente constantes a ecuaciones algebraicas lineales. Estas ecuaciones aparecen en innumerables sistemas digitales utilizados en amplios ámbitos, como ser control, procesamientos de imágenes, filtros, sonido, etc.

Referencias

[1] . Glyn James, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Pearson Educación, 2002

[2] http://www.ehu.es/Procesadodesenales/tema6/102.html

[3] http://materias.fi.uba.ar/61107/Apuntes/TZ00.pdf

[4] http://www.uv.es/~soriae/tema_3_pds.pdf.