Transformada de Laplace aplicada al diseño de Sistemas de Control Dinamicos

Lucas Iván Menchi

Estudiante de Ingeniería en Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
lucasmenchi@hotmail.com.ar
Junio 2015

Resumen: En el presente documento se detallan, y luego, se utilizan, recursos matemáticos para resolver sistemas de control dinámicos dado el caso especial de un tanque con agua dentro y los cambios en la altura del agua respecto a la cantidad de liquido que se va ingresando. Considerando las ecuaciones diferenciales que surgen de las leyes físicas que gobiernan el sistema, y su resolución a través de la Transformada de Laplace, se obtiene una ecuación que relaciona, en nuestro caso de estudio, la altura resultante con el flujo de llenado.

Palabras clave: sistema de control, ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace.

I. INTRODUCCIÓN

Un sistema de control dinámico se define conceptualmente como un ente que capta acciones externas o variables de entrada, y que cuyas respuestas son denominadas variables de salida. Las acciones externas al sistema se pueden clasificar en Perturbaciones o Variables de Control, estas últimas son manipulables mientras que las primeras no, por ello escapan al informe a desarrollar.

Un modelo matemático de un sistema de control dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con la mayor precisión posible. Un sistema puede representarse en muchas formas diferentes, por lo que puede tener muchos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva.

Partiendo de estos dos conceptos es posible relacionar, aplicando conocimientos previos, la altura del nivel de agua en un tanque que pierde agua en un flujo regulado de salida respecto a un cambio en el flujo de llenado del mismo, lo que es el objetivo del presente artículo.

II. DESARROLLO

El caso de estudio es encontrar el nivel del agua cuando el tanque logra el equilibrio entre el flujo de llenado Qi y el flujo de salida Qo, en un sistema como el que se plantea a continuación:

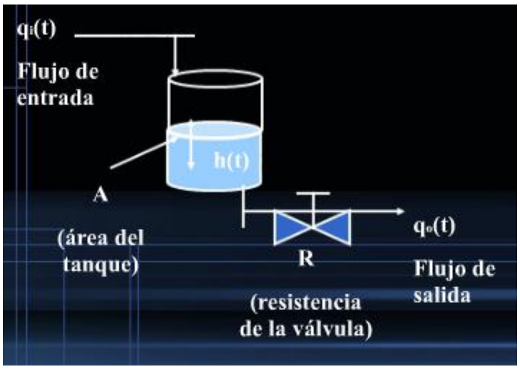

Figura 1

Generalizando la resolución de este sistema en particular es válido decir que, considerando un dado sistema que se nos presenta como problema, si las leyes físicas que rigen su comportamiento nos presentan modelos de comportamiento variables en el tiempo, podremos utilizar ecuaciones diferenciales respecto a precisamente el tiempo para caracterizar el problema y luego, aplicando la transformada de Laplace, resolverlo: la presente nota sentará las bases para que, mediante una resolución análoga, se encuentre un sistema de control dinámico que se ajuste a la resolución del problema.

Una función llamada: "Función de transferencia", nos permitirá relacionar el flujo de salida con el de entrada: se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la función de salida (altura del agua h), y la transformada de la función de entrada (Qi), bajo la suposición de que ambas condiciones iniciales son 0. Sea nuestra función de transferencia:

$$G(s)=\frac{L(h(t))}{L(Qi(t))}$$

A partir de este concepto, es posible representar la dinámica del sistema mediante ecuaciones algebraicas en la variable s.

Conociendo las leyes que rigen el sistema, se tiene la siguiente relación:

$$q_i(t)-q_o(t)=A\frac{dh}{dt}$$

La resistencia de la válvula se define como sigue:

$$R=\frac{h(t)}{q_o(t)}$$

Esta definición nos permite expresar una ecuación diferencial lineal muy simple:

$$q_i(t)-\frac{1}{R}h(t)=A\frac{dh}{dt}$$

Aplicando transformada de Laplace a ambos lados:

$$Q_i(s)-\frac{1}{R}H(s)=AsH(s)$$

Ordenando:

$$Q_i(s)=H(s)\left(As+\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)}=\frac{R}{ARs+1}$$

Este último resultado da nuestra función de transferencia. Ahora, conociendo las variables de entrada con sus valores reales, esto es, valores o funciones que se presentarán con el problema, o en todo caso, que podemos medir, se podrán obtener con cálculos simples el valor h en el equilibrio del sistema.

Vale destacar que de forma análoga a la nota presentada, se podría requerir que, dado el mismo tanque, resolver cuanta resistencia deberá presentar la válvula para no sobrepasar una altura dada. Son todas estas variantes del mismo problema, y generalizando aun más, como se mencionó previamente, con las alternativas presentadas aquí se pueden resolver sistemas de control similares, no importa en el ámbito en el que sea. Algunos casos puntuales, para notar esto: Fuerza que harán los amortiguadores de un auto al atravesar un bache de una determinada altura y resolución de un circuito eléctrico RLC.

III. REFERENCIAS

[1] Katshuhiko Ogata. “Ingenierías de Control Moderna”. 3º edición.

[2] Ruel Churchill. “Variable compleja y Aplicaciones”. 5º edición.

[3] William Derrick. “Variable compleja con Aplicaciones”. 2º edición.

[4] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”.