Diferentes Aplicaciones de Fourier en el Procesamiento Digital del Sonido

Lucas Montané

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
montanelucas@hotmail.com
Julio 2013

Resumen: En este informa se explica de forma breve y sencilla la importancia de la Serie y la Transformada de Fourier para la ingeniería como para cualquier profesión que necesite medir datos del mundo real (analógicos), procesarlos y almacenarlos de manera digital, Se hace énfasis en esto último usando como señal el sonido explicándose brevemente la compresión de audio MP3 y la implementación de un filtro de frecuencias digital.

I. INTRODUCCIÓN

Este informe muestra aplicaciones de la Serie de Fourier (SF) y la Transformada de Fourier (TF) para el manejo digital del sonido.

Siendo este último una señal analógica resulta complicada de almacenar para ser usado o analizado en un tiempo posterior a la ocurrencia del mismo. Es por eso que resulta más sencillo digitalizarlo para almacenarlo y más adelante procesarlo de la manera que fuese necesaria.

La SF y la TF resultan útiles para estos fines ya que permiten ver la distribución de frecuencias del sonido, esto discretiza la señal permitiendo que se almacenen digitalmente los valores de frecuencias para cada tiempo determinado, luego mediante un DAC (siglas de "*Digital-to-Analog Converter*", conversor digital a analógico en inglés) se leen estos datos y se logra reproducir el sonido original.

Se tratara principalmente como la TF y la SF son fundamentales para la compresión presente en el formato de audio "MP3" y se ejemplificara la implementación de un filtro digital.

II. APLICACIONES

A. Audio digital (MP3)

La compresión "MP3" aplica este análisis a la señal de entrada para minimizar el uso de espacio en donde se almacenara el archivo resultante. Esto se logra descomponiendo el sonido original en su espectro de frecuencias.

Luego se divide el rango de frecuencias del sonido original en 32 bandas que el oído humano logra oír por separado. A estas se les aplica una TF para conseguir otras 18 bandas de frecuencias por cada una, dando un total de 576 bandas de frecuencia individuales. Luego de cada una de estas se remueven los componentes que son indetectables por el oído humano.

La señal resultante de este proceso es comprimido aún más mediante una codificación de Huffmann, una técnica que representa los valores de frecuencia más repetidos mediante un código más corto que el usado para aquellos valores de menor ocurrencia (por ejemplo, sería un desperdicio usar los 141120 bits de la señal muestreada para codificar 1/10 segundo de silencio en una canción)

Esto permite que el archivo final sea mucho más pequeño ya que se requieren de menor cantidad de bits para almacenar las representaciones matemáticas creadas mediante el análisis de Fourier de la señal original.

Cabe aclarar que si bien en la creación practica de un archivo MP3 se realizan otros análisis matemáticos de la señal de entrada más complejos que una simple descomposición de Fourier es un ejemplo adecuado para los objetivos de este informe.

B. Filtros

Estos principios también podrían utilizarse para crear un filtro, es decir un dispositivo que discrimine en su señal de salida todas aquellas frecuencias de la señal de entrada que difieran de las que el diseñador del filtro imponga.

Una vez que se ha decidido que frecuencias se han de filtrar, una implementación par aun filtro digital vía software seria tomar la señal de entrada y aplicarle una TF para ver su distribución en el espectro de frecuencias. Una vez hecho esto, se toman aquellas frecuencias que estén en el rango deseado y se les aplica la TF Inversa para obtener la señal de salida deseada. Esta selección generalmente se hace mediante la TF inversa de la TF de la señal de entrada convolucionada con una función de filtro.

En el caso de un filtro pasa-bajos la función filtro con la que se realiza la convolución podría ser una función Heaviside centrada en el origen.

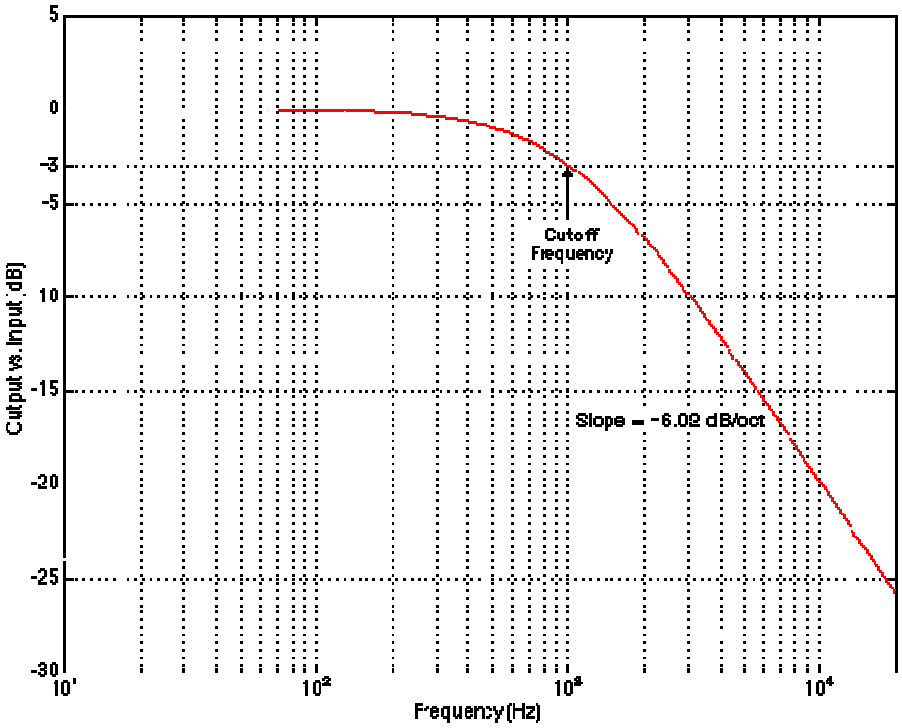

Figura 1: Acción de un filtro pasa-bajos, aquellas frecuencias menores a 10^8Hz (en este caso) son discriminadas en la salida del filtro

III. FUNDAMENTACÍON MATEMÁTICA

Dada una función $f(t)$ periódica de periodo $T = 2L$ y continua a tramos en $[-L,\ L]$ puede ser representada por una suma infinita de senos y cosenos, mejor conocida como la SF:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega t) + \ b_n sen(\omega t)$$

donde:

$$\omega = \frac{n\pi}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\,(\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\text{sen}\,(\omega t)dt$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

O en su forma compleja:

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{i\omega t}\ ,$$

donde:

$$\gamma_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Y para el caso de funciones no periódicas que cumplan ser continuas a tramos en todo intervalo finito, tengan derivada a derecha e izquierda en todo punto y que sean absolutamente integrables se pueden representar mediante la Integral de Fourier (IF),se muestra en este caso la forma compleja ya que es más reducida:

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}dt,$$

donde:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Es la fórmula de la Transformada de Fourier de $f(t)$, aplicación que para cada punto del espacio de t le hace corresponder un punto en el espacio de frecuencias de ω.

Aplicar estas operaciones a una señal permite ver como distribuyen las diferentes frecuencias que la componen. Esto permitiría manipular la señal de entrada de manera más sencilla, pues su distribución frecuencia es una función discreta y no continua.

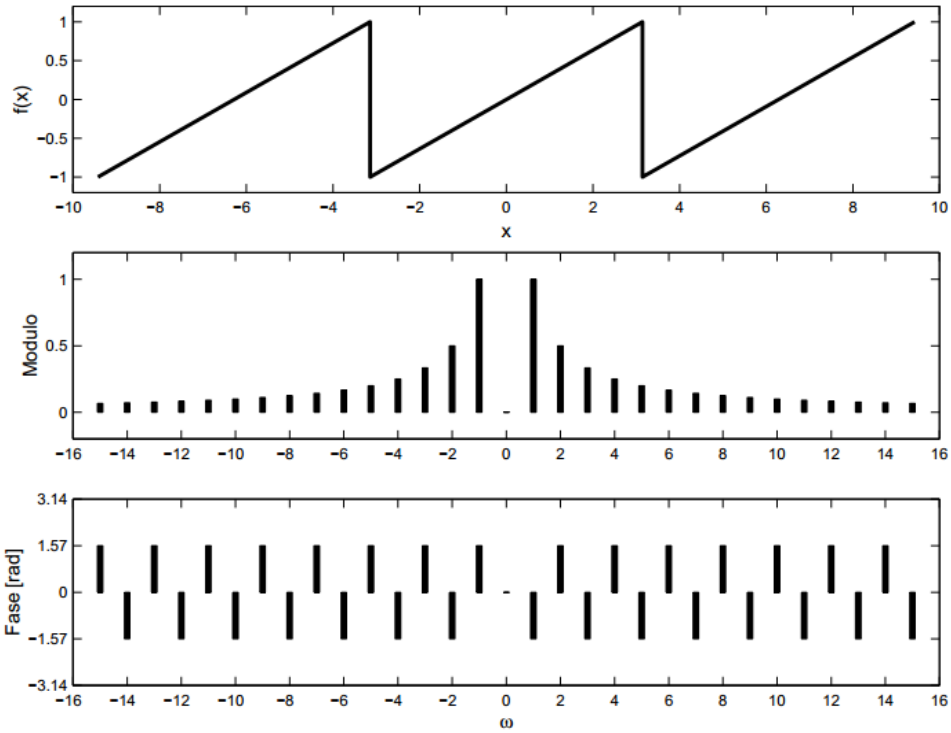

Figura 2: distribución de frecuencias en términos de modulo fase para la función diente de sierra

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} i e^{i\,nx}$$

IV. CONCLUSIÓN

A partir de la realización de este informe y del estudio de Funciones de Variable Compleja (FVC) se llega a la conclusión de que los números imaginarios son de gran importancia a la hora de recrear una fiel representación del mundo real.

Tanto la SF como la IF (y la TF) son imprescindibles a la hora de comprender como se maneja el procesamiento de señales analógicas de manera digital. Son de gran importancia a la hora de practicar Métodos de Simulación Numérica como para el Procesamiento Digital de Imágenes, ambos tópicos fuertes en la carrera de un Ingeniero Electrónico.

REFERENCIAS

[1] Keith Devlin "The maths behind MP3" The Guardian, Thursday 4 April 2002, [Internet], disponible en: http://www.guardian.co.uk/technology/2002/apr/04/internetnews.maths

[2] Joseph Gehring, "Fourier Transforms and Their Use in Data Compression" powerpoint en línea, plantilla 13 disponible en: https://www.google.com.ar/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CEQQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.thomasbeatty.com%2FMATH%2520PAGES%2FARCHIVES%2520-%2520EXAMS%2FSenior%2520Seminar%2F11%2520Gehring.pptx&ei=XrHxUZiKCaL0iQLVz4GgBw&usg=AFQjCNEqpiHQtXaFtAnUcf3G9APvBksRFA&sig2=SNcGd8dzAq1Dnf73Ut_tLw