Series de Fourier
Aplicación: Ecuación de ondas unidireccionales

Bualó Giordano, Lucas Santiago

Estudiante de Ingeniería Electrónica en
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
lubualo@hotmail.com
Julio 2013

Resumen: El siguiente trabajo desarrolla la resolución de la ecuación de ondas unidimensionales. Incluye los pasos para realizar dicho proceso e incluye un ejemplo. Esto nos permite evidenciar la utilidad de las series de Fourier, mostrando una de sus varias aplicaciones.

Palabras clave: series de Fourier, ondas, ecuaciones diferenciales.

I. INTRODUCCIÓN

Una **serie de Fourier** es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Dichas series, desarrollado por Jean Baptiste Joseph Fourier permiten analizar funciones periódicas mediante la representación de las mismas como sumas infinitas de funciones senoidales (es decir, senos y cosenos).

Fourier estableció que cualquier función periódica de período T=2L, es decir f(t) = f(t+T), continua a tramos en [-L, L], tiene como representación la serie:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right] \tag{1.1}$$

Donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)dt \tag{1.2}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \tag{1.3}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \tag{1.4}$$

O bien, como exponencial compleja:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \, e^{\frac{in\pi t}{L}} \tag{1.5}$$

Donde

$$\gamma_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{L}} dt \tag{1.6}$$

II. ONDAS UNIDIMENSIONALES

Para empezar a desarrollar la temática que nos interesa en este informe, primero debemos aclarar algunos conceptos.

¿Qué es una onda?

Una onda es una perturbación del medio a través del cual se propaga. Por ejemplo, el sonido, las olas del mar, la luz, etc. Y el medio puede ser de distintas características como el agua, el aire, el vacío, etc.

Las ondas se pueden clasificar según distintos criterios; en nuestro caso nos interesan las o**ndas unidimensionales**, es decir, aquéllas que se propagan a lo largo de una sola dimensión del espacio.

Ahora, ¿qué significa matemáticamente una onda unidimensional?

Si consideramos una onda que se transmite a lo largo de una cuerda en el eje *x*, a una velocidad *a* y con una amplitud *u* (que generalmente depende tanto de *x* y de *t*), la ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{2.1}$$

Veremos a continuación que representar funciones como series de Fourier nos facilitará la resolución de dicha ecuación.

III. Resolución de la ecuación de ondas

Para comenzar con la resolución de la ecuación de ondas (2.1), estableceremos como condición de contorno que la onda comience del reposo, es decir:

$$u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \tag{3.1}$$

Luego proponemos como solución una función de la forma

$$u(x,t) = X(x).T(t) \tag{3.2}$$

Derivando y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t}X(x) = 0 \; y \; \frac{\partial}{\partial x}T(t) = 0$$

Llegamos a que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = X(x).T''(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = X''(x).T(t)$$

Si volvemos a la ecuación de ondas y reemplazamos con los resultados obtenidos

$$X(x).T''(t) = a^2.X''(x).T(t) \rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}.\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

Con $\lambda \in \mathrm{R}$, tenemos las siguientes ecuaciones

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.3) \qquad \text{y} \qquad T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \quad (3.4)$$

Además sabemos que $u(0,t) = X(0).T(t) = 0$, de lo que se deduce $X(0) = X(\pi) = 0$. Ya que si esto no se cumpliera obtendríamos $T(t) = 0$, lo que resultaría contradictorio.

Luego, para facilitar la resolución, asumiremos $a = 1$.

Resolviendo (3.3), llegamos a que en este caso la solución general está dada por

$$X(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Que junto a las condiciones de contorno (3.1) para X nos dan las soluciones

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad \lambda_n = \mathrm{n}^2$$

Por otro lado, resolviendo (3.4),

$$\mathrm{T}''(\mathrm{t}) + n^2\mathrm{T}(\mathrm{t}) = 0$$

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)$$

Entonces, una solución de nuestra ecuación con las condiciones de contorno está dada por

$$u_n(x,t) = [A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)].\sin(nx)$$

Como la ecuación de ondas es lineal y homogénea entonces su solución general será de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)].\sin(nx) \tag{3.5}$$

Para poder calcular los coeficientes A_n y B_n, vamos a establecer:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx)$$

Y extendemos ambas funciones de manera impar en el intervalo [-π, π], de manera que podamos desarrollarlas como series de Fourier; sabiendo que dichas series serán absoluta y uniformemente convergentes.

Entonces obtenemos:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \tag{3.6}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx \tag{3.7}$$

IV. EJEMPLO

Supongamos que el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{a} & 0 \le x \le a \\ \dfrac{A(\pi - x)}{\pi - a} & a \le x \le \pi \end{cases}$$

Y que inicialmente se encuentra en reposo, g(x)=0. Calculamos los coeficientes utilizando (3.6) y (3.7), que resultan:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2A\sin(an)}{an^2(\pi - a)}$$

$$B_n = 0$$

Reemplazando en (3.5) encontramos que la solución de nuestro ejemplo es:

$$u(x,t) = \frac{2A}{a(\pi - a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(an)}{n^2}\cos(nt)\sin(nx)$$

V. CONCLUSIONES

Las series de Fourier constituyen una herramienta útil para la resolución de diversas problemáticas. Aunque aparentemente su cálculo parezca complejo nos permiten reducir funciones complejas a una suma de senos y cosenos, facilitándonos el trabajo en ciertas ocasiones.

REFERENCIAS

[1] Euler.us.es, [internet], disponible en http://euler.us.es, [consultada el 22 de julio de 2013].
[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [consultada el 22 de julio de 2013].
[3] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.
[4] Ruel V. Churchill, Series de Fourier y problemas de contorno, 1966.