Transformadas de Laplace en resolución de circuitos RLC

Lucas A. Álvarez Lacasa

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
lackyalvarez@gmail.com

Julio 2011

Resumen: En el presente artículo se pretende desarrollar cómo las transformadas de Laplace brindan una forma sencilla y práctica de resolver ecuaciones diferenciales lineales. En particular, se analiza la aplicación directa sobre circuitos eléctricos del tipo RLC, muy comunes y usados en la Física y Matemática.

Palabras clave: *ecuaciones diferenciales lineales, transformadas de Laplace, circuitos eléctricos RLC.*

I. INTRODUCCIÓN

En ingeniería frecuentemente se suelen encontrar sistemas cuyas características son modeladas por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales simultáneas con coeficientes constantes. Si bien hay muchas formas de resolver los sistemas, en este artículo se adoptará la resolución a partir de transformadas de Laplace. Además, no estará centrado en encontrar respuesta frente a cualquier tipo de sistema de ecuaciones diferenciales, sino que se verá aplicado exclusivamente a aquellos que surgen al plantear las ecuaciones en circuitos eléctricos. Dentro de estos, se hará foco en los del tipo RLC.

II. ECUACIONES DIFERENCIALES

Las palabras ecuaciones y diferenciales hacen pensar en la solución de un sistema de ecuaciones que contenga derivadas. Así, la idea será resolver ecuaciones como $y'' + 2y' + y = 0$, en donde se desea conocer la función y.

Este tipo de ecuaciones son muy recurrentes para modelar sistemas en casi cualquier rama del estudio, desde la Biología, Química, Economía hasta la Física y la Matemática.

A. Definición

Formalmente, una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una **ecuación diferencial**.

B. Clasificación

Es importante hacer una breve clasificación de las ecuaciones diferenciales que se pueden llegar a hacer presentes. Así, se pueden clasificar según su tipo, orden y linealidad:

Clasificación según el tipo: si una ecuación sólo contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria. Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes se llama ecuación en derivadas parciales.

Clasificación según el orden: el orden de una ecuación diferencial, ya sea de cualquiera de los dos tipos mencionados antes, es el de la derivada de mayor orden en la ecuación.

Clasificación según la linealidad o no linealidad: se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^{(n)} = f\,(x,\ y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ es lineal cuando f es una función de $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Esto significa que una ecuación es lineal si se puede escribir de la siguiente manera:

$$a_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x) \tag{1}$$

La ecuación (1) permite observar las dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:
i) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado, esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1. ii) Cada coeficiente depende sólo de la variable x, es decir, la independiente. De no existir tal dependencia, se denomina “con coeficientes constantes”.

Es necesario saber distinguir una ecuación diferencial lineal de otra que no lo es, ya que el método de resolución de sistemas simultáneos de ecuaciones diferenciales a través de transformadas de Laplace se aplica a sistemas con estas características.

III. CIRCUITOS RLC DE UNA SOLA MALLA

Como se dijo al comienzo del artículo, la idea principal es aplicar transformadas de Laplace para resolver las ecuaciones diferenciales que puedan llegar a aparecer al plantear el sistema en un circuito de este tipo (lineales y con coeficientes constantes). Antes de indagar en la forma de resolverlo, es importante detallar brevemente cómo se compone un circuito RLC.

A. Definición

Un circuito RLC es un circuito eléctrico que consiste en un resistor (que tiene una resistencia R, medida en ohms **Ω**), un capacitor (que tiene una capacitancia C, medida en farads F) y un inductor (que tiene una inductancia L, medida en Henrys H) conectados en serie o en paralelo. Es claro que su nombre se debe a la primera letra de cada una de las palabras de sus componentes.

Además de los elementos antes mencionados, se tienen variables asociadas como la **corriente** *i(t)* (medida en amperes A) y **voltaje** *v(t)* (medido en volts V). El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la **carga** *q(t)* (medida en coulombs C) mediante la relación:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{2}$$

Las relaciones entre el flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje *v(t)* a través de los elementos en el tiempo *t* son:

Caída de voltaje a través de la resistencia = Ri

Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{C}\int i dt = \frac{q}{C}$

IV. RESOLUCIÓN DE CIRCUITO RLC

Una vez introducidos los conceptos de ecuación diferencial lineal y circuito RLC, se puede pasar a explicar cómo resolver un circuito del tipo antes mencionado, utilizado transformadas de Laplace. El método de resolución es sencillo, una vez que se plantea la ecuación que modela el circuito, sólo basta aplicar la transformada de Laplace en todos lados, para que luego el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas sea transformado en un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, las cuales son resueltas para las variables transformadas. Luego, las transformadas inversas dan las soluciones deseadas.

A. Problema modelo: planteo y resolución

El circuito RLC de la figura (2) está formado por un resistor R, un capacitor C y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje *e(t)*. Antes de cerrar el interruptor en el tiempo t=0, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. El objetivo es determinar la carga *q(t)* en el capacitor y la corriente resultante *i(t)* en el circuito en el tiempo *t*, sabiendo que $R = 160\Omega,\ L = 1H,\ C = 10^{-4}F$ y $e(t) = 20V$.

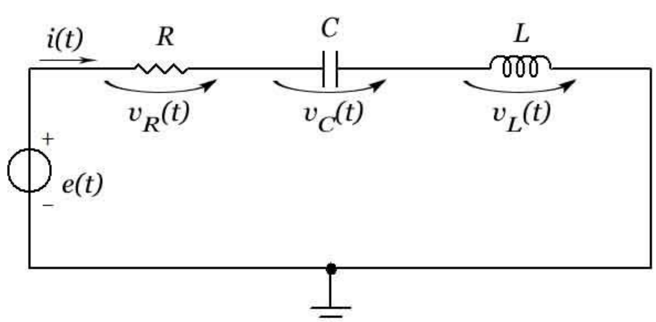

Figura 1 : Circuito RLC del problema modelo

Aplicando la segunda ley de Kirchoff al circuito antes mostrado, se obtiene:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e(t)$$

Usando al ecuación (2), se tiene:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Sustituyendo los valores dados para R, C, L y *e(t)* se obtiene:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

Ésta será la ecuación diferencial que se deberá resolver. Entonces, aplicando la transformada de Laplace en ambos lados, se llega a la siguiente ecuación:

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = [sq(0) + q'(0)] + 160q(0) + \frac{20}{s}$$

Donde *Q(s)* es la transformada de *q(t)*. Se supone que *q(0)=0, q'(0)=0 y i(0)=0,* con lo cual la ecuación anterior se reduce simplemente a:

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = \frac{20}{s}$$

Esto es,

$$Q(s) = \frac{20}{s(s^2 + 160s + 10^4)}$$

Haciendo el desarrollo en fracciones simples se obtiene:

$$Q(s) = \frac{\frac{1}{500}}{s} - \frac{1}{500}\frac{s + 160}{s^2 + 160s + 10^4}$$

$$= \frac{1}{500}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+80) + \frac{4}{3}(60)}{(s+80)^2 + (60)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{500}\left[\frac{1}{s} - \left[\frac{s + \frac{4}{3}(60)}{s^2 + (60)^2}\right]_{s \to s+80}\right]$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso del teorema de traslación da:

$$q(t) = \frac{1}{500}\left(1 - e^{-80t}\cos 60t - \frac{4}{3}e^{-80t}\, sen\, 60t\right) \qquad (3)$$

Luego, la corriente resultante en el circuito *i(t)* está dada por:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3}e^{-80t}\, sen\, 60t \qquad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) son la solución al problema planteado de modelo, las cuales representan la carga en el capacitor y la corriente eléctrica que circula por el circuito en un tiempo *t*.

V. Leyes y Teoremas utilizados

Ley 1 *La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero (segunda ley de Kirchoff).*

Teorema 1 *Si f(t) es una función que tiene una transformada de Laplace F(s), con Re(s)>σ, entonces la función* $e^{at}f(t)$ *también tiene una trasformada de Laplace dada por:*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad Re(s) > \sigma + Re(a)$$

Prueba.

Una prueba de este teorema se sigue directamente de la definición de transformada de Laplace, ya que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)e^{-s}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

Luego, como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \ Re(s) > \sigma$$

Se observa que la integral de arriba está estructurada como la transformada de Laplace de *f(t)*, excepto que *s-a* toma el lugar de *s*, así que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), Re\ (s-a) > \sigma$$

O bien:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), Re(s) > \sigma + Re(a)$$

Una manera que permite expresar el resultado y que suele ser útil es:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = [\mathcal{L}\{f(t)\}]_{s\rightarrow s-a} = [F(s)]_{s\rightarrow s-a}$$

VI. Conclusión

Sintetizando, se puede apreciar que las transformadas de Laplace permiten resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (presentes en los planteos de circuitos eléctricos) de manera rápida, mecánica, simple y sencilla. Además, la solución obtenida es completa, es decir, solución transitoria y estacionaria (mientras el circuito se establece y una vez establecido).

REFERENCIAS

[1] D. G. Zill, "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado", Pearson Educación, segunda edición 2002, pp.109-110, 130-132.

[2] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. 1er. Cuatrimestre 2011, pp.56-63. 2011

[3] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", International Thomson Editores, sexta edición 1997, pp. 1-3.

[4] Monografías, [internet], disponible en http://www.monografias.com/trabajos32/transformada-laplace/transformada-laplace3.shtml#sistemasecuac [acceso el 6 de julio de 2011].

[5] R. Resnick, "Física Vol.2 Versión Ampliada", Compañía Editorial Continental, tercera edición 1994, cap. 39.

[6] Rincón del Vago, [internet], disponible en http://pdf.rincondelvago.com/aplicaciones-de-las-ecuaciones-diferenciales-de-primer-y-segundo-orden.html [acceso el 6 de julio de 2011].

[7] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit [acceso el 7 de julio de 2011].

[8] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial [acceso el 6 de julio de 2011].