Aplicación de las transformaciones de Laplace en circuitos eléctricos

Llorente Germán

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
germangaita@gmail.com
Noviembre 2011

Resumen: En este informe se mostrara una de las aplicaciones de la transformada de Laplace, mas específicamente en el análisis de circuitos eléctricos mediante el uso de ecuaciones diferenciales. Tomaremos como caso de estudio un circuito RLC. Se considera a esta técnica especialmente atractiva para examinar el comportamiento de estos sistemas debido a que las condiciones iniciales son automáticamente tenidas en cuenta en el proceso de transformación.

Palabras clave: transformada de Laplace, circuitos eléctricos, ecuaciones diferenciales, proceso de transformación.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar el artículo haremos una introducción a los elementos que componen nuestros circuitos eléctricos haciendo referencia también a ecuaciones y leyes fundamentales para comprender el desarrollo del mismo. Para terminar haremos una breve descripción de los conceptos básicos de la transformada de Laplace que serán de utilidad.

Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos: resistencias, capacitores e inductores, con las variables asociadas corriente *i(t)* y voltaje *v(t)*. El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga Q mediante la relación

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Es común ver a los elementos básicos, mencionados anteriormente, representados en la figura 1.

El flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje v(t) a través de estos elementos se relacionan en el tiempo de la siguiente manera:

- Caída de voltaje a través de la resistencia = Ri (Ley de Ohm)
- Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{C}\int idt = \frac{q}{C}$

Cabe mencionar también que la interacción entre los elementos que forman el circuito eléctrico está determinada por las leyes de Kirchhoff:

Ley 1 *La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier nodo de un circuito es igual a la suma de las que salen.*

Ley 2 *La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier trayectoria en un circuito es cero.*

Podemos definir a la transformada de Laplace de una función *f(t)* de la siguiente manera:

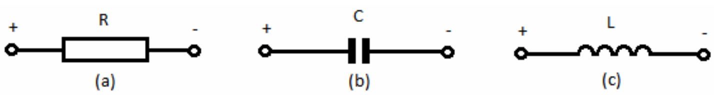

Figura 1: Elementos básicos de un circuito. (a) Resistencia, (b) Capacitor, (c) Inductor.

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Algunas de sus propiedades son:

- Linealidad: $L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$
- Transformada de una derivada: $L[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = s^n L[f(t)] + s^{n-1} f(0) + ... + \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^n}$
- Transformada de una integral: $L[\int_o^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{s} L[f(t)]$

Un teorema importante es el primer teorema de traslación:

Teorema 1 *Si f(t) es una función que tiene una transformada de Laplace F(s), con Re(s)>* σ_c *, entonces la función* $e^{at} f(t)$ *también tiene una transformada de Laplace dada por*

$\pounds\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$ *, Re(s)>* σ_c *+ Re(a)*

II. Desarrollo del artículo

Para mostrar la aplicación de la transformada de Laplace sobre circuitos eléctricos tomaremos como caso de estudio el circuito RLC mostrado en la figura 2, calcularemos su carga y corriente en función del tiempo.

En la Figura 2 vemos una fuente v(t), una resistencia R, un inductor L y un capacitor C conectados en serie. Inicialmente en tiempo $t = 0$, el interruptor abierto nos indica que tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Realizaremos el ejemplo asumiendo los siguientes valores: *R=160Ω, L=1H, C=*$10^{-4} F$ *y v(t)=20V*

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff sobre el circuito obtenemos

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \tag{1}$$

o, usando $i = \frac{dq}{dt}$

$$v(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

Sustituyendo los valores dados para *L, R, C y v(t)* da

$$20 = \frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10^4 q$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados llegamos a la ecuación

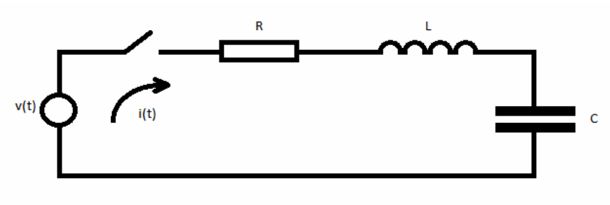

Figura 2: Circuito RLC.

$$(s^2+160s+10^4)Q(s)=[sq(0)+q(0)]+160q(0)+\frac{20}{s}$$

Donde *Q(s)* es la transformada de *q(t)*. Estamos suponiendo que *q(0)=0 y q(0)=i(0)=0*, asi que esto se reduce a

$$(s^2+160s+10^4)Q(s)=\frac{20}{s}$$

esto es,

$$Q(s)=\frac{20}{s(s^2+160s+10^4)}$$

Desarrollando en fracciones parciales da

$$Q(s)=\frac{\frac{1}{500}}{s}-\frac{1}{500}\frac{s+160}{s^2+160s+10^4}$$

$$=\frac{1}{500}\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+80)+\frac{4}{3}(60)}{(s+80)^2+\frac{4}{3}(60)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{500}\left[\frac{1}{s}-\left[\frac{s+\frac{4}{3}\times 60}{s^2+60^2}\right]_{s\to s+80}\right]$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso del primer teorema de traslación (teorema 1) da

$$q(t)=\frac{1}{500}(1-e^{-80t}\cos 60t-\frac{4}{3}e^{-80t}sen60t)$$

Entonces, la corriente resultante en el circuito *i(t)* está dada por

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{1}{3}e^{-80t}sen60t$$

Observe que pudimos haber determinado la corriente aplicando la transformada de Laplace en (1). Sustituyendo los valores dados para *L, R, C* y *v(t)* y usando (1) llegamos a la ecuación transformada

$$I(s)=\frac{20}{(s^2+80)^2+60^2} \qquad (=sQ(s) \text{ puesto que } q(0)=0)$$

la cual, aplicando la transformada inversa, da como antes

$$i(t)=\frac{1}{3}e^{-80t}(sen60t)$$

III. CONCLUSIONES

Se logró conocer la importancia de la técnica de transformada de Laplace en la resolución y análisis de circuitos eléctricos.

Existe una equivalencia real entre los elementos principales de un circuito eléctrico como los resistores, condensadores e inductores en el dominio del tiempo y en el dominio de Laplace.

La existencia de las equivalencias de circuitos permite la posibilidad de analizarlos directamente en el dominio de Laplace sin tomar en cuenta el dominio del tiempo.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. *1er. Cuatrimestre 2011,* pp.56-63. 2011.

[2] G. James, "*Matemáticas avanzadas para ingeniería*", Pearson Educación, segunda edición 2002, pp.109, 130-132.

[3] Presentación Laplace, [internet], disponible en http://es.scribd.com/doc/54182271/Presentacion-Laplace, [consultada el 9 de octubre de 2011].

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 14 de Octubre de 2011].