Transformada de Fourier para el funcionamiento de un afinador electrónico
Funciones de Variable Compleja

Lisandro Laurent

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
lisandro.laurent@gmail.com
Julio 2014

Resumen: El presente informe propone la explicación del funcionamiento de un afinador electrónico de una forma conceptual. Se hace hincapié en el uso de la Transformada Rápida de Fourier como herramienta fundamental en el funcionamiento del afinador electrónico obviando la explicación de la circuitería necesaria para su fabricación. Se propone brindar una idea general del funcionamiento con una previa introducción a los fenómenos sonoros.

Palabras clave: Transformada Rápida de Fourier, afinador electrónico, frecuencia.

I. INTRODUCCIÓN

Si bien el origen de la música es desconocido, ya que en su origen no se utilizaban instrumentos musicales para interpretarla, existe constancia que hacia el 3000 a. C. en Sumeria ya contaban con instrumentos de percusión y cuerda (lira y arpa). En la Antigua Grecia se consideraba a Hermes como el transmisor de la música a los humanos, y primer creador de un instrumento musical, el arpa, al tender cuerdas sobre el caparazón de una tortuga. El sistema organizado de la armonía occidental, practicado desde el año 1650 al 1900 aproximadamente, evolucionó a partir de la música estrictamente melódica de la Edad Media que dio origen a la polifonía. La organización de la música medieval deriva de los conocimientos fragmentarios de la música griega antigua por parte de los teóricos medievales. La música polifónica, que es la más popular hoy en día, exige que los diversos instrumentos se encuentren afinador de una determinada manera. Si bien la afinación de los instrumentos puede realizarse utilizando el propio oído, resulta de mucha utilidad poder hacerlo mediante un artefacto electrónico.

El presente informe propone el funcionamiento de un afinador electrónico haciendo primero una breve introducción del sonido como fenómeno físico y hace hincapié en la necesidad de los conocimientos de funciones de variables complejas como eje fundamental en el funcionamiento del afinador.

II. FÍSICA DEL SONIDO

El sonido, en física, es cualquier fenómeno que involucre la propagación en forma de ondas elásticas, a través de un fluido u otro medio elástico, que esté generando el movimiento vibratorio de un cuerpo. Las cualidades del sonido son básicamente cuatro: la altura, la duración, la intensidad, el timbre y serán descriptas a continuación.

La altura define si el sonido es grave, agudo o medio, y viene determinada por la frecuencia fundamental de las ondas sonoras, medida en ciclos por segundo o Hertz (Hz). Para que los humanos podamos percibir un sonido, éste debe estar comprendido entre el rango de audición de 20 y 20.000 Hz.

La duración es el tiempo durante el cual se mantiene un sonido lo cual no nos interesará representarlo matemáticamente. La intensidad viene determinada por la potencia, que a su vez está determinada por la amplitud y nos permite distinguir si el sonido es fuerte o débil.

El timbre viene dado por el número e intensidad de armónicos. Al hacer vibrar un cuerpo, no se obtiene un sonido puro, sino un sonido compuesto de sonidos de diferentes frecuencias que sumadas darán como resultado el sonido audible.

III. DESARROLLO

El afinador cuenta con un micrófono interno, éste es un transductor electroacústico. Su función es la de traducir las vibraciones debidas a la presión acústica ejercida sobre su cápsula por las ondas sonoras en energía eléctrica.

Dado que el micrófono proporciona una señal variante en el tiempo, es necesario estudiar su periodicidad y por lo tanto su frecuencia. Desde el punto de vista del microprocesador interno del afinador, este observará una variación de valores de voltaje en una de sus entradas. Dado que el funcionamiento del microprocesador es en un entorno digital, la señal que recibirá será una señal discreta que obtendrá tras interpretar estos valores con un convertidor analógico a digital.

El principal objetivo de un afinador es detectar la frecuencia de la onda de entrada para poder realizar una comparación con los valores de frecuencia que tienen asociadas cada una de las notas. Puesto que la señal que se registra está asociada al dominio temporal, es necesario realizar una transformación al ámbito frecuencial.

Aquí es donde la transformada rápida de Fourier juega un papel fundamental ya que permite la descomposición de una señal en componentes de frecuencias diferentes.

El análisis de Fourier de una función periódica se puede utilizar para sintetizar ondas periódicas como una suma infinita de senoidales y/o cosenoidales de la frecuencia fundamental $w = \frac{\pi}{L}$ y sus múltiplos (armónicos) nw.Es decir dichas ondas se pueden aproximar mediante las sumas parciales de su serie de Fourier. La transformada rápida de Fourier (TRF) es un algoritmo matemático que permite el cálculo de la transformada de Fourier discreta (TFD) y su inversa para la transformación de una función del tiempo en una función de la frecuencia. A veces se describe como la transformación del dominio del tiempo al dominio de frecuencia.

Por lo que, por ejemplo, si se aplicara la TRF a una señal periódica como la de la *Figura 1* se obtendría otra señal en el dominio de la frecuencia con un pico máximo en la frecuencia fundamental de la señal periódica en el tiempo.

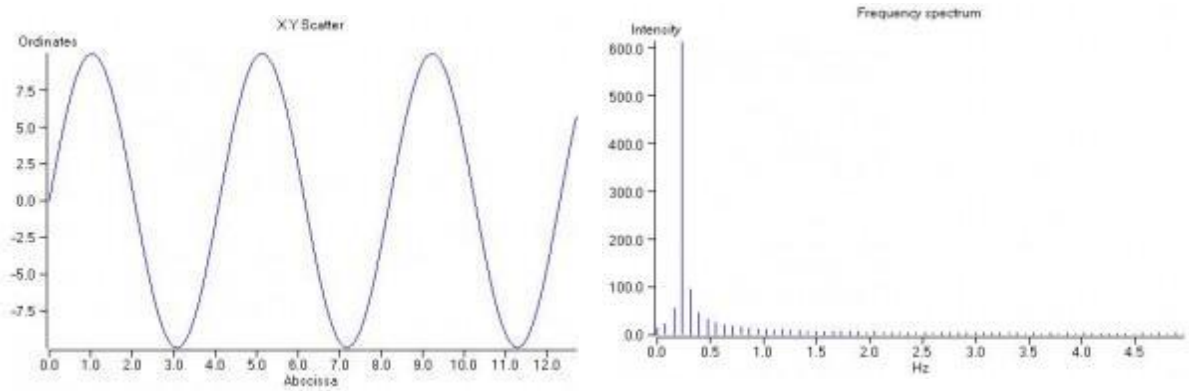

Figura 1: Transformada de Fourier de una señal senoidal pura

Si la señal estuviera compuesta además de armónicos, ruido, se obtendría un resultado como en la *Figura 2* donde el pico máximo de la función en el domino frecuencial se corresponde con la frecuencia fundamental de la señal temporal de entrada.

El algoritmo pone algunas limitaciones en la señal y en el espectro resultante. Por ejemplo: la señal de la que se tomaron muestras y que se va a transformar debe consistir de un número de muestras igual a una potencia de dos. La mayoría de los analizadores TRF permiten la transformación de 512, 1024, 2048 o 4096 muestras. El rango de frecuencias cubierto por el análisis TRF depende de la cantidad de muestras recogidas y de la tasa de muestreo.

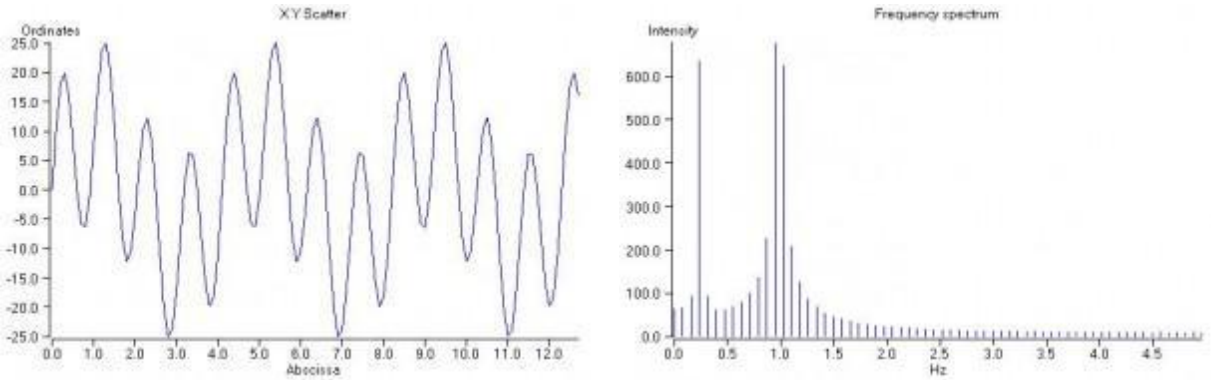

Figura 2: Transformada de Fourier de una señal senoidal con armónicos y ruido

La tasa de muestreo es el número de muestras por unidad de tiempo que se toman de una señal continua para producir una señal discreta, durante el proceso necesario para convertirla de analógica en digital (*Figura 3).*

Como todas las frecuencias, generalmente se expresa en hertz (Hz, ciclos por segundo) o múltiplos suyos, como el kilohertz (KHz).

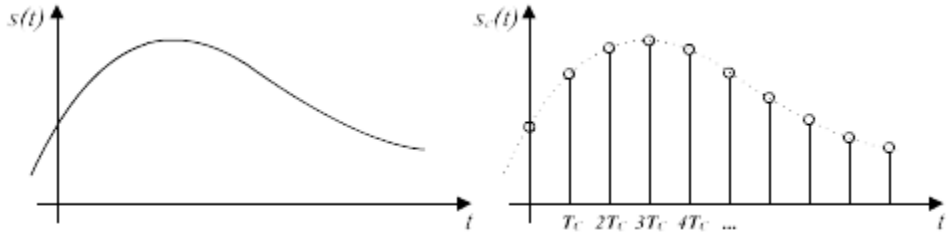

Figura 3: muestreo de una señal continua.

Según el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, para poder replicar con exactitud (es decir, siendo matemáticamente reversible en su totalidad) la forma de una onda es necesario que la frecuencia de muestreo sea superior al doble de la máxima frecuencia a muestrear.

Si se utiliza una frecuencia menor a la establecida por el teorema de Nyquist, se produce una distorsión conocida como aliasing; algunos autores traducen este término como solapamiento. El aliasing impide recuperar correctamente la señal cuando las muestras de ésta se obtienen a intervalos de tiempo demasiado largos. La forma de la onda recuperada presenta pendientes muy abruptas.

Para evitar las caídas abruptas se utiliza la técnica conocida como sobremuestreo (oversampling), que permite reconstruir, tras la conversión digital a analógico, una señal de pendiente suave. Las muestras obtenidas se superponen con los datos originales y los conversores analógico a digital los promedian, obteniendo una única muestra ponderada, por ejemplo, si se hacen tres muestreos, finalmente, la muestra tomada no es ninguna de las tres, sino su valor medio.

IV. Transformada rápida de Fourier

El algoritmo para calcular la Transformada de Fourier Rápida (TFR), fue popularizado por Cooley y Tukey en 1965. Se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo, calculando la TFR de un conjunto de cuatro muestras de datos. Si se define el conjunto de muestras de una señal como la señal $X_0[n]$ en TD de forma que los datos de entrada para el algoritmo sea $\{X_0[1] \quad X_0[2] \quad X_0[3] \quad X_0[4]\}$.

La fórmula de la Transformada Discreta de Fourier (TFD) es la siguiente:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{n-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi}{N}(nk)} \qquad (1)$$

A fin de simplificar los cálculos:

$$W = e^{-j(2\pi/N)} \qquad (2)$$

Para este caso de 4 puntos de datos, es posible escribir la TFR en forma de matriz como

$$\begin{matrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{matrix} = \begin{matrix} W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^9 \end{matrix} * \begin{matrix} X_0[0] \\ X_0[1] \\ X_0[2] \\ X_0[3] \end{matrix} \qquad (3)$$

Efectuar la multiplicación usual de matrices directa requeriría N^2 multiplicaciones complejas y N(N-1) adiciones complejas. Por lo tanto puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{matrix} * \begin{matrix} X_0[0] \\ X_0[1] \\ X_0[2] \\ X_0[3] \end{matrix} \qquad (2)$$

Debido a que $W = W^{n+m*N}$, donde m es un entero, es posible factorizar la matriz en el producto de dos matrices;

$$\begin{matrix} X[0] \\ X[2] \\ X[1] \\ X[3] \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{matrix} * \begin{matrix} X_0[0] \\ X_0[1] \\ X_0[2] \\ X_0[3] \end{matrix} \qquad (5)$$

Los elementos “1” y “2” han cambiado de lugar en el vector que se encuentra del lado izquierdo. Cuando se multipliquen las matrices, los renglones 1 y 2, también se intercambiarán. Después se calcula el número de multiplicaciones y adiciones que se requieren. Primero se identifica el resultado de multiplicar la segunda matriz cuadrada por el conjunto de datos de entrada como:

$$\begin{matrix} X[0] \\ X[2] \\ X[1] \\ X[3] \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{matrix} * \begin{matrix} X_0[0] \\ X_0[1] \\ X_0[2] \\ X_0[3] \end{matrix} \qquad (6)$$

El primer elemento es:

$$X_1[0] = X_0[0] + W^0 X_0[2] \qquad (7)$$

De manera similar $X_1[1]$ requiere una multiplicación y una adición. Sin embargo, $X_1[2]$ requiere sólo una adición debido a que este cálculo requiere una multiplicación y una adición. Aunque W^0 es uno, se dejará esto W^0=-W^2 y el producto ya se ha obtenido en el cálculo del primer elemento y puede, en consecuencia, sólo almacenarse hasta que se necesite y luego restarse en vez de sumarse. De manera similar, $X_1[3]$ sólo requiere una adición más. Hasta ahora se tienen dos multiplicaciones y cuatro sumas. Apelando a condiciones de simetrías similares en la segunda multiplicación de matrices se encuentra que se requieren dos multiplicaciones y cuatro sumas más. Así, en total, se necesitan cuatro multiplicaciones y ocho adiciones. Puesto que, computacionalmente, las multiplicaciones requieren por lo general mucho más tiempo de cómputo que las adiciones, el algoritmo de TFR para cuatro puntos es alrededor de cuatro veces más rápido que la TDF directa.

El cálculo directo de la Transformada Discreta de Fourier requiere $O(n^2)$ operaciones aritméticas. Mediante un algoritmo FFT se puede obtener el mismo resultado con sólo $O(n \log n)$ operaciones.

V. CONCLUSIÓN

A partir de este informe con los conocimientos previos de Funciones de Variables complejas se puede comprender de una manera general el funcionamiento del afinador electrónico y se dio una explicación de cómo funciona la Transformada Rápida de Fourier.

Hemos apreciado como el conocimiento obtenido en el estudio de las variables complejas nos brinda herramientas para la solución de distintos problemas de la ingeniería. Es motivador encontrar la respuesta a cómo funcionan ciertos artefactos cotidianos lo que a su vez nos genera dudas acerca del funcionamiento de otras.

VI. REFERENCIAS

[1] Jesús Mariano Merino, "Las vibraciones de la música".

[2] G. Calandrini, Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variables Compleja, 2do cuatrimestre 2012.

[3] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_m%C3%BAsica [acceso el 28 de julio de 2014].

[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_r%C3%A1pida_de_Fourier [acceso el 28 de julio de 2014].