Análisis de Fourier aplicado a la resolución de la Ecuación del Calor

Leandro G. Ercoli

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
leandroercoli@hotmail.com

Febrero 2014

Resumen: En este trabajo, se presenta la resolución de la ecuación del calor unidimensional mediante la aplicación de las series de Fourier primero, haciendo uso del método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales y luego por medio de transformadas de Fourier. Los resultados obtenidos en el primer caso, se aplican a un ejemplo concreto del enfriamiento de una barra de sección constante.

Palabras clave: Serie de Fourier, Transformada de Fourier, Ecuación del calor.

I. INTRODUCCIÓN

En física, se define al "flujo de calor" como el proceso de transferencia de energía debido a la diferencia de temperatura entre dos puntos. El calor es una forma de energía y su unidad en el sistema SI es el Joule (J). Por su parte, la "temperatura" de una sustancia es una medida de la energía cinética de sus átomos. Según las definiciones de Isaac Newton "una diferencia de temperatura entre dos sustancias en contacto, causa una transferencia de energía desde la sustancia con mayor temperatura a la sustancia con menor temperatura, y se denomina flujo de calor. Si no hay diferencia de temperatura, no hay transferencia de calor". [1]

A principios del siglo XIX, Joseph Fourier (científico y matemático francés), introdujo la idea de expandir funciones en series trigonométricas como método para resolver la ecuación de conducción del calor desarrollada en su *"Théorie Analytique de la Chaleur"* (Teoría analítica del calor). Su texto clásico se convirtió desde ese entonces, en la fuente para los métodos modernos de resolución de problemas prácticos asociados con ecuaciones diferenciales parciales sujetas a condiciones de frontera dadas. [2]

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica *f(t)* de periodo $T = 2\pi/\omega$ en la que el conjunto base es el conjunto de funciones seno de diferentes amplitudes, fases y periodos, obteniéndose una representación expandida como:

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\omega t), \tag{1}$$

donde los coeficientes están dados por las fórmulas de Euler:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Las ideas y técnicas de las series de Fourier se extienden a funciones *f(x)* no periódicas definidas en la recta real completa; esto lleva a la integral de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}dw \tag{2}$$

donde:

$$\hat{f}(w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx \tag{3}$$

es la transformada de Fourier $\hat{f}(w)$. Entonces (2) es la transformada inversa de Fourier.

III. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR POR SERIES DE FOURIER

Un ejemplo típico de transferencia de calor es encontrar la distribución de temperatura transitoria unidimensional *u(x,t)* de una barra de sección constante y longitud L, con una determinada distribución inicial de temperatura $f(x)$, cuyos extremos (*x=0, x=L*) se mantienen a temperatura constante. El problema se resuelve a partir de la ecuación general del calor que en dirección x es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \kappa = \frac{K}{\sigma\rho} \tag{4}$$

donde K: conductividad térmica, σ: calor específico, ρ: densidad. Suponiendo que los extremos de la barra se mantienen a 0ºC, se tienen las siguientes **condiciones de frontera:**

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0 \qquad para\ todo\ t > 0 \tag{5}$$

En general, si la temperatura inicial de la barra está representada por una función *f(x)*, la **condición inicial** será:

$$u(x,0) = f(x)\ para\ f(x)\ dada, 0 < x < L \tag{6}$$

Aplicando *el método de separación de variables* o método del producto a la ecuación de calor (4), se determinan sus soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$; que son producto de dos funciones, cada una de las cuales depende únicamente de una de las variables (*x* y *t*). Reemplazando en (4) se obtiene:

$$XT' = \kappa X''T \qquad \left(X' = \frac{dX}{dx}, T' = \frac{dT}{dt}\right)$$

que se puede reescribir así:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)} \tag{7}$$

Con las variables separadas, el lado izquierdo de (7) es una función sólo de la variable independiente *x*, y el lado derecho es una función sólo de la variable independiente *t*, entonces al cambiar *x* o *t* se afectaría únicamente el primer miembro o el segundo, respectivamente (sin alterar el otro miembro), por lo tanto ambos miembros deben ser iguales a una constante *k*. Para *k≥0* la solución única *u=XT* que satisface (5) es *u≡0* (trivial). Para $k = -\rho^2$ (negativa) se obtienen de (7) dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias:

$$X'' + \rho^2 X = 0 \tag{8}$$

$$T' + \kappa\rho^2 T = 0 \tag{9}$$

Una solución general de (8) es:

$$X(x) = Acos(\rho x) + Bsen(\rho x) \tag{10}$$

Las soluciones X y T de (8) y (9) deben satisfacer las condiciones de frontera (5), es decir: $u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ \ u(L,t) = X(L)T(t) = 0$ para toda $t > 0$. Si T≡0, u≡0, entonces $X(0) = X(L) = 0$ y por (10) se obtiene $X(0) = A = 0$ y entonces:

$$X(L) = Bsen(\rho L) = 0, \tag{11}$$

con $B \neq 0$ (a fin de evitar la solución trivial $F \equiv 0$). Las soluciones no triviales se obtienen sólo si la constante $k = -\rho^2$ toma ciertos valores. Por (11), y como $sen(\rho) = sen(-\rho)$, las soluciones para ρ son: $\rho = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Se obtienen así las soluciones no triviales para X:

$$X(x) = B_n \sin\left(\frac{\mathrm{n\pi x}}{\mathrm{L}}\right), \ \mathrm{n} = 1, 2, \ldots \qquad \mathrm{B_n}\ \text{una constante arbitraria}$$

Se resuelve ahora la otra ecuación diferencial (9), que para $\rho = \frac{n\pi}{L}$ es: $T' + {\lambda_n}^2 \kappa T = 0$, donde $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$. Las soluciones a esta ecuación son: $T_n(t) = B_n e^{-{\lambda_n}^2 \kappa t}, \qquad n = 1, 2, \ldots$; donde B_n es una constante. Por lo tanto las funciones:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = B_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n{}^2 \kappa t} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

son soluciones de la ecuación de calor (4) que satisfacen las condiciones de frontera (5). Estas funciones son las llamadas *eigenfunciones* o *funciones características* del problema, que corresponden a los *eigenvalores* o *valores característicos* $\lambda_n = (\sqrt{\kappa} n\pi)/L$. Para obtener una solución que también satisfaga la condición inicial (6), se considera una serie de estas *eigenfunciones* (12):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n{}^2 \kappa t} \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \tag{13}$$

A partir de esta expresión y de (6) se tiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

Por lo tanto los términos B_n deben elegirse de modo que $u(x,0)$ quede como la serie de senos de Fourier de $f(x)$; así:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Suponiendo que $f(x)$ es continua por secciones en el intervalo $0 \leq x \leq L$ y que tiene derivadas laterales en todos los puntos interiores de ese intervalo, la serie de Fourier (13) con coeficientes (14) es la solución del problema físico planteado. Debido al factor exponencial, todos los términos de (13) tienden a cero cuando *t* tiende a infinito; la rapidez del decremento varía con *n*.

IV. Ejemplo usando la solución de la ecuación del calor por series de Fourier

Si en el caso particular de la barra bajo estudio la distribución de temperatura inicial está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 < x < L/2 \\ L - x & si \quad L/2 < x < L \end{cases}$$

se obtienen los coeficientes:

$$B_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^{L} (L-x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right).$$

Si *n* es par, integrando se obtiene $B_n = 0$. Si n es impar, se tiene:

$$B_n = \frac{4L}{n^2\pi^2} \qquad n = 1, 5, 9, \ldots \quad y \quad B_n = -\frac{4L}{n^2\pi^2} \qquad n = 3, 7, 11, \ldots$$

Por lo tanto, la solución es:

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2}\left[sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) exp\left[-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \kappa t\right] - \frac{1}{9} sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right) exp\left[-\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 \kappa t\right] + - \cdots\right]. \tag{15}$$

En la figura 1 se presentan los resultados de *u(x,t)* para distintos tiempos. Aquí puede verse que la distribución de temperatura de la barra va cambiando hacia una forma más "aplanada" a medida que transcurre el tiempo y se enfría como consecuencia de la pérdida de calor hacia los extremos. Finalmente, cuando se alcance el estado estacionario (t>>2 s), toda la barra estará a la temperatura de los extremos (0 ºC).

V. Solución de la ecuación del calor por transformada de Fourier

Ahora se resolverá la ecuación del calor, con las mismas condiciones iniciales y de frontera, haciendo uso de las relaciones (2) y (3). Se buscan soluciones a (4) que tengan la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, tal que *X(x)* se mantenga finito para $|x| \to \infty$. Las soluciones generales que se ajustan a estos requerimientos son múltiplos

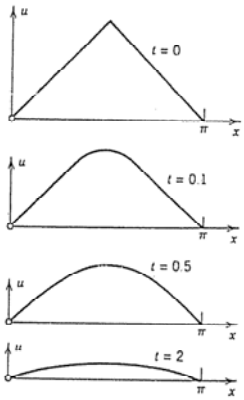

Figura 1: Solución del ejemplo para $L = \pi, \kappa = 1$ y varios valores de *t*.

de $\exp(ikx - k^2\kappa t)$, donde k es cualquier número real. Se construye por el método de superposición la siguiente solución general:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx - k^2\kappa t)\, dk\,. \tag{16}$$

En la solución por series de Fourier, las condiciones iniciales en *x=0* y *x=L* requerían seleccionar sólo una familia finita de números para *k*, pero ahora *k* puede tomar cualquier número real. Además se resolvió la ecuación tomando una suma de *eigenfunciones* o *funciones características;* ahora esta suma se convierte en una integral. Se puede satisfacer la condición inicial (6) por (3) y (2) si $A(k) = \hat{f}(w)/2\pi$. Introduciendo (3) en (16), la solución se puede expresar en términos de la distribución inicial *f(x)*, como

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \exp(ik(x-w) - k^2\kappa t)\, dw\,.$$

Invirtiendo el orden de integración y haciendo la integración con respecto a *k*, se encuentra la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{-(x-w)^2/4\kappa t} dw\ . \tag{17}$$

VI. Conclusión

El análisis de Fourier resulta ser una importante herramienta en la resolución de problemas en muchas ramas de la ingeniería (transferencia de calor y masa, análisis de ondas y señales, etc.). En particular se estudió en este informe la aplicación de series y transformada de Fourier para encontrar la distribución de temperatura no estacionaria unidimensional en una barra sometida a condiciones iniciales y de frontera especificadas. Queda demostrado que las herramientas matemáticas estudiadas en esta asignatura son de aplicación directa para la resolución de problemas ingenieriles reales.

Referencias

[1] B. Osgood, "Lecture Notes for EE 261, The Fourier Transform and its Applications", Standford University, disponible en http://see.stanford.edu/materials/lsoftaee261/book-fall-07.pdf, [consultada el 3 de Febrero de 2014].
[2] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.
[3] F. P. Incropera, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, J. Wiley & Sons, 2007.
[4] E. Kreyszig, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, vol II, Limusa Wiley, 2004.
[5] C. C. Lin & L. A. Segel, Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences, Macmillan Publishing, 1974.