

Circuito serie RL

Leandro O. Diaz

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
leodiaz_olimp@hotmai.com
Agosto 2011*

Resumen: El artículo pretende mostrar la aplicación de los conceptos estudiados en teoría de funciones de variable compleja en el área de la Física, más específicamente en la resolución de circuitos eléctricos. Para eso utilizaremos la Transformada de Laplace como mecanismo para resolver ecuaciones diferenciales. En este caso resolveremos un circuito RL formado por una resistencia y una inductancia, mostrando la relación que existe entre ambos.

Palabras clave: Circuito, Laplace, Resistor, Inductancia.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar a describir específicamente el contenido del artículo detallaremos brevemente algunos conceptos que serán de gran utilidad para comprender las siguientes secciones.

Un circuito eléctrico es un recorrido preestablecido por el que circulan las cargas eléctricas. Estas cargas eléctricas constituyen una corriente eléctrica que pasa de un punto que tiene mayor potencial eléctrico a otro que tiene un potencial inferior. Para mantener permanente esa diferencia de potencial, llamada también tensión, entre los extremos de un conductor se necesita un dispositivo llamado fuente electromotriz (fem) que tome las cargas que llegan a un extremo y las impulse hasta el otro. El flujo de cargas eléctricas por un conductor constituye una corriente eléctrica. La caída de potencial puede deberse en este caso al paso de la corriente por una inductancia o un resistor. Mediante las leyes de Kirchhoff plantearemos la ecuación diferencial que resuelve el circuito. La Transformada de la Laplace constituirá una herramienta práctica fundamental para resolverlo y así poder analizar las relaciones físicas que existen entre los componentes que conforman el circuito.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La Transformada de Laplace es una herramienta muy poderosa para la resolución de circuitos RL. La ecuación diferencial que está en el dominio del tiempo mediante la Transformada de Laplace pasa al dominio de la frecuencia. Efectuando las respectivas operaciones algebraicas y luego aplicando la Transformada Inversa de Laplace obtenemos la respuesta en el dominio del tiempo. Cabe destacar que si bien aplicamos la Transformada de Laplace en el ámbito de la Física, más específicamente para la resolución de circuitos eléctricos, ésta podrá aplicarse en diversos campos siendo una herramienta muy útil.

A. Definición

Para un $t \geq 0$ la transformada de Laplace se define como:

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$. Se define para cualquier número complejo, s .

B. Propiedades

A continuación describiremos algunas de las propiedades que utilizaremos para resolver el circuito:

- Linealidad:
Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$$

- Traslación
Para $\alpha \in \mathbb{C}$

$$e^{\alpha t} f(t) \leftrightarrow F(s - \alpha)$$

- Derivada

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- Algunas transformadas

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

III. CIRCUITO ELÉCTRICO RL

En esta sección describiremos rápidamente los componentes que integran el circuito que se analizará y cómo se representan gráficamente. Además se enunciarán las leyes de Kirchhoff las cuales resultan fundamentales para resolver el circuito.

A. Componentes

El circuito RL está constituido por dos elementos básicos: un resistor (que tiene una resistencia R , medida en Ohms) y un inductor (que tiene una inductancia L , medida en Henry). La corriente que circula tendrá asociada una variable $i(t)$ (medida en Amperes).

Convencionalmente los elementos básicos se representan gráficamente como en la figura 1.

Las relaciones entre el flujo de corriente $i(t)$ y la caída de voltaje a través de estos elementos en el tiempo t son:

- La caída de voltaje a través de la resistencia es $R \cdot i$ (Ley de Ohm)
- La caída de voltaje a través de la inductancia es $L \frac{di}{dt}$

B. Leyes de Kirchhoff

La interacción entre los componentes individuales que conforman el circuito está dada por las leyes de Kirchhoff:

Ley 1 La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.

Ley 2 La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.

La utilización de estas leyes nos lleva a las ecuaciones del circuito, las cuales pueden ser analizadas a través de la Transformada de Laplace.

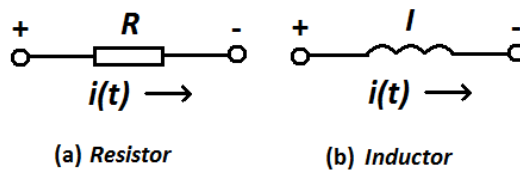


Figura 1: Componentes del circuito eléctrico

IV. EJEMPLO: CIRCUITO RL EN SERIE

En este apartado desarrollaremos el análisis matemático del circuito eléctrico para luego llegar a las conclusiones físicas. El circuito RL estará formado por un resistor R y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje (fem). Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t=0$ la corriente resultante $i(t)$ será nula (esto es $i(0)=0$).

Mediante las técnicas matemáticas y leyes vistas en las secciones previas determinaremos la corriente que circula en el circuito en función del tiempo que transcurre.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff obtenemos:

$$fem - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = fem$$

Para resolver esta ecuación diferencial aplicamos la Transformada de Laplace en ambos miembros quedando:

$$\mathcal{L} \left(L \frac{di}{dt} \right) + \mathcal{L}(Ri) = \mathcal{L}(fem)$$

Aplicando linealidad obtenemos,

$$L \mathcal{L} \left(\frac{di}{dt} \right) + R \mathcal{L}(i) = fem \mathcal{L}(1)$$

Luego aplicando las propiedades descritas en la sección II.B, logramos:

$$L (s I(s) - i(0)) + R I(s) = \frac{fem}{s}$$

Realizando manejos algebraicos llegamos a que:

$$I(s) = \frac{fem}{s(Ls + R)}$$

Ahora debemos aplicar la transformada inversa para pasar nuevamente al dominio del tiempo. Esto es:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}(I(s)) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{fem}{s(Ls + R)} \right)$$

Aplicando fracciones simples obtenemos:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{fem/R}{s} - \frac{L fem/R}{Ls + R} \right)$$

Distribuyendo y aplicando linealidad,

$$i(t) = fem/R \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) - fem/R \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right)$$

Aplicando Transformada Inversa llegamos a que:

$$i(t) = \frac{fem}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

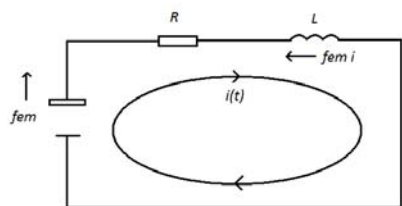


Figura 2: Circuito RL al cerrar el interruptor

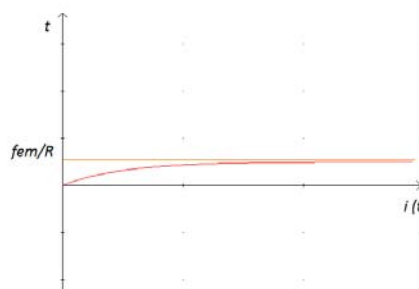


Figura 3: Gráfico de $i(t)$

V. ANÁLISIS DEL RESULTADO OBTENIDO

Cuando el interruptor en la figura 2 se cierra, la corriente en el resistor comienza a elevarse. Si el inductor no estuviera se elevaría rápidamente hasta un valor estacionario fem/R . Sin embargo, a causa del inductor se produce una fem inducida (fem_i) en el circuito la cual se opone a la fem de la batería. Así, la corriente en el resistor depende de la suma de dos fem, una fem constante debido a la batería y otra variable de signo opuesto debido a la inductancia. En tanto esté presente esta segunda fem, la corriente en el resistor es menor que fem/R . Como podemos apreciar en la figura 3 la corriente en el circuito tiende al valor fem/R exponencialmente.

VI. CONCLUSIÓN

Demostremos que la Transformada de Laplace es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones diferenciales, no sólo en el ámbito de la Física, sino en cualquier ámbito de la Ingeniería. Conocer estos conceptos resultará beneficioso a futuro para nuestra vida profesional.

REFERENCIAS

- [1] James, G., *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002. **(517 J233a2)**.
- [2] David Halliday, Robert Resnick, Kenneth S. Krane, *Física Vol. (530 R312a4)*.
- [3] *Wikipedia, La enciclopedia libre*, [internet], disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki>, [acceso el 2 de Agosto de 2011].