

Aplicación de la Transformada de Laplace: Respuesta de Frecuencia.

Macarena A. Latini

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
macarena.latini@hotmail.com
Agosto 2012*

Resumen: La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil en electrónica ya que gracias a ella el comportamiento de sistemas electrónicos complejos puede describirse usando ecuaciones ordinarias en lugar de ecuaciones diferenciales. En este informe, se hará una breve explicación sobre la utilización de la Transformada de Laplace con respecto a la Respuesta de Frecuencia de un sistema, y se presentará un ejemplo concreto en el cual se determinará la respuesta a la frecuencia de un Filtro RC.

Palabras clave: transformada, filtro RC, frecuencia.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace cuenta con diversas aplicaciones. Una de las más importantes, es que permite la resolución de ecuaciones diferenciales, lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas, con lo cual se facilita su estudio.

El ámbito de aplicación de esta transformada no queda reducido a los sistemas electrónicos. El comportamiento de cualquier sistema lineal, sea del tipo que sea, queda completamente descrito mediante las ecuaciones ordinarias obtenidas a través de la transformada de Laplace.

A continuación se define la Transformada de Laplace de una función $f(t)$:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Cabe destacar que no siempre es necesario calcular la integral, dado que esto puede hacerse por medio de propiedades y una tabla de manera más simple.

Los métodos de respuesta de frecuencia proveen una herramienta gráfica para el análisis y diseño de sistemas. Estos métodos se han desarrollado a partir de consideraciones prácticas, y como tales todavía son usados ampliamente por los ingenieros proporcionando grandes conocimientos sobre el comportamiento del sistema.

II. DESARROLLO

La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas.

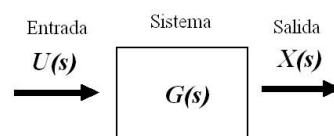


Figura 1: Diagrama en bloque de la función de transferencia.

A. Respuesta de Frecuencia

La respuesta de frecuencia puede obtenerse fácilmente de la función de transferencia del sistema $G(s)$ reemplazando s por $j\omega$.

Considerando el sistema ilustrado en la Figura 1 con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (m \leq n) \quad (1)$$

Cuando la entrada es una señal senoidal

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (2)$$

aplicada en el tiempo $t=0$, la respuesta del sistema $x(t)$ para $t \geq 0$ esta determinada por:

$$X(s) = G(s) \mathcal{L}\{A \sin(\omega t)\} \quad (3)$$

Esto es,

$$X(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{KA\omega (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)(s - j\omega)(s + j\omega)} \quad (4)$$

Y expandiendo en fracciones simples obtenemos:

$$X(s) = \frac{\alpha_1}{s - j\omega} + \frac{\alpha_2}{s + j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s - p_i} \quad (5)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, la respuesta del sistema $x(t)$, $t \geq 0$, esta dada por:

$$X(t) = \alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{-j\omega t} + \sum_{i=1}^n \beta_i e^{p_i t} \quad (6)$$

En la práctica, en general estamos interesados con sistemas que son estables, para los cuales los polos p_i con $i=1,2,\dots,n$, de la función de transferencia $G(s)$ están en la mitad izquierda del plano s . En consecuencia, para sistemas prácticos los términos en el dominio del tiempo $\beta_i e^{p_i t}$ con $i=1,2,\dots,n$ tienden a cero conforme t crece y no contribuirán a la respuesta en estado estacionario $X_{ee}(t)$ del sistema. Así, para sistemas lineales estables, esta última está determinada por los dos primeros términos como:

$$x_{ee}(t) = \alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{-j\omega t} \quad (7)$$

Luego, usando la regla del “encubrimiento” (cover-up) para determinar los coeficientes α_1 y α_2 en la expansión de fracciones parciales y expresando $G(j\omega)$ en forma polar, obtenemos el siguiente resultado:

$$x_{ee}(t) = A|G(j\omega)| \sin(j\omega + \arg G(j\omega)) \quad (8)$$

Esto indica que si un sistema lineal estable con función de transferencia $G(s)$ está sujeto a una entrada senoidal, entonces:

- La respuesta en estado estacionario también es una senoidal con la misma frecuencia ω de entrada;
- La amplitud de esta respuesta es $|G(j\omega)|$ veces la amplitud A de la entrada senoidal: se dice que la entrada está **amplificada** si $|G(j\omega)| > 1$ y **atenuada** si $|G(j\omega)| < 1$;

c) El corrimiento de fase (diferencia de fase) entre la entrada y la salida es $\arg G(j\omega)$. Se dice que el sistema se **adelanta** si $\arg G(j\omega) > 0$ y que se **atrás** si $\arg G(j\omega) < 0$.

Las variaciones tanto en la magnitud $|G(j\omega)|$ como en el argumento $\arg G(j\omega)$ cuando varía la frecuencia ω de la entrada senoidal constituyen la respuesta de frecuencia del sistema, la magnitud $|G(j\omega)|$ representa la ganancia de amplitud o razón de amplitud del sistema para entrada senoidal con frecuencia ω y el argumento $\arg G(j\omega)$ representa el corrimiento de fase.

B. Impedancia de un condensador. Respuesta en frecuencia

La **impedancia** es una magnitud que establece la relación (cociente) entre la tensión y la intensidad de corriente. Tiene especial importancia si la corriente varía en el tiempo, en cuyo caso, ésta, la tensión y la propia impedancia se describen con números complejos o funciones del análisis armónico.

Sabemos que en un condensador el voltaje entre sus placas es proporcional a la carga almacenada e inversamente proporcional a la capacidad. Además podemos expresar la carga como la integral de la corriente que entra al condensador a lo largo del tiempo, de modo que obtenemos:

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} ; \quad v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (9)$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace:

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) ; \quad Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \quad (10)$$

En el dominio de la transformada de Laplace la impedancia del condensador es $1/Cs$.

Para ver como depende la impedancia del condensador con la frecuencia sustituimos s por $j\omega$ en “10” y obtenemos:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Cj\omega} \quad (11)$$

que es la impedancia de alterna del condensador.

C. Ejemplo

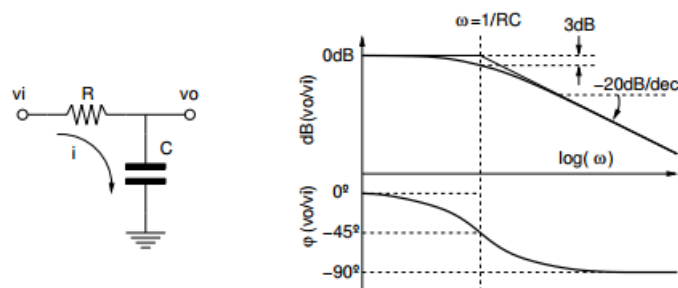


Figura 2: Filtro RC y su correspondiente diagrama de Bode

Vamos a analizar este circuito en busca de su función de transferencia, esto es: la ecuación que relaciona el voltaje de salida con el de la entrada. La tensión de salida, v_o , es el voltaje del condensador, de modo que podemos escribir:

$$v_0(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C} = \frac{\int [v_i(t) - v_0(t)]dt}{RC} \quad (12)$$

Y aplicando la transformada de Laplace obtenemos:

$$V_0(s) = \frac{V_i(s) - V_0(s)}{RCs}; \quad V_0(s) \left(1 + \frac{1}{RCs}\right) = \frac{V_i(s)}{RCs}; \quad \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = H(s) = 1 + \frac{1}{RCs} \quad (13)$$

Al mismo resultado llegamos si simplemente consideramos el circuito como un divisor de tensión y en su ecuación usamos la impedancia del condensador de “10”:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1/CS}{R + 1/CS} = 1 + \frac{1}{RCs} \quad (14)$$

La respuesta en frecuencia del filtro se obtiene sustituyendo s por $j\omega$ en su función de transferencia, $H(s)$. El resultado es un valor complejo que se puede descomponer en una magnitud y una fase (la magnitud muy habitualmente se expresa en decibelios: $dB(|H(j\omega)|) = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$):

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad (15)$$

$$\varphi(H(j\omega)) = -\arctan(RC\omega) \quad (16)$$

Diagrama de Bode asintótico: Si ω es pequeña la magnitud vale aproximadamente 1 (0 dB). Por el contrario, si ω es grande la magnitud se puede aproximar por $1/RC\omega$, de modo que ésta decrece de forma inversamente proporcional a la frecuencia (pendiente de -20 dB/década: $dB(|H(j\omega)|) = dB(1/RC) - 20 \log_{10} \omega$). Finalmente, la magnitud vale $1/\sqrt{2}$ (-3.01 dB) para $\omega = 1/RC$.

La fase de la función de transferencia comienza valiendo 0° para ω pequeñas, vale justo -45° para $\omega = 1/RC$ y -90° para frecuencias altas.

III. CONCLUSIÓN

La transformada de Laplace es una herramienta muy útil en el ámbito de la electrónica, ya que gracias a ella problemas complejos pueden expresarse de manera más sencilla, específicamente el análisis de sistemas dinámicos lineales, que una vez estudiado su comportamiento se puede proceder a diseñar y analizar los sistemas de control de manera simple.

Además, la utilización de la transformada de Laplace para la respuesta de frecuencia de un sistema es primordial, pues esto se ha demostrado claramente en el ejemplo práctico en el cual el sistema es un filtro RC.

IV. REFERENCIAS

- [1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002, pp. 202-206.
- [2] http://www.ele.uva.es/~jesus/eanalogica/transf_laplace.pdf Apuntes de Electrónica Analógica, respuesta en frecuencia y transformada de Laplace.
- [3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki>, [acceso el 18 de agosto de 2012].