Transformadas y series de Fourier para el análisis del impacto de las vibraciones en edificaciones.

Lapi, Agustín Javier

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avenida Leandro Nisefolo Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Junio 2015

Resumen: en el trabajo presentado a continuación se explica la importancia de analizar las vibraciones en las diferentes edificaciones, demostrando que el espectro de frecuencias que afecta a estas mismas, esta sólida y directamente relacionada a las transformadas y series de Fourier. Además las vibraciones generadas en las estructuras dependen de las propiedades de rigidez y elasticidad de los materiales, así como también de efectos climáticos (viento, temperatura, etc.). Es por eso que se realiza un análisis matemático y computacional utilizando como herramienta principal Fourier, que permite descomponer funciones periódicas de onda complejas en series trigonométricas convergentes.

Palabras clave: Transformada de Fourier, Series de Fourier, Impacto de las frecuencias en las edificaciones, vibración/oscilación de estructuras.

I. INTRODUCCIÓN

Todas las estructuras que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar, estas vibraciones pueden ser excitadas por fuentes como el viento, oleaje, motores, terremotos, etc. Si la frecuencia de la vibración coincide con la frecuencia natural de oscilación de la estructura, esta entra en resonancia y su amplitud de vibración alcanza magnitudes capaces de dañar o incluso destruirla. La vibración de un edificio no solo es molesta, sino que también puede generar el derrumbe de la estructura dependiendo de su intensidad. En un edificio existen dos clases de vibraciones: las provenientes de fuentes internas, y las de fuentes externas. Las internas son generadas por ascensores, máquinas, etc. Las externas están relacionadas al tráfico, vientos, etc. Estas últimas pueden producir desde una sensación hasta daños en el funcionamiento de instrumentos o de la estructura misma. Los parámetros más influyentes, son la frecuencia natural (mencionada anteriormente), las formas de los modos y el amortiguamiento.

Por otra parte se encuentran los terremotos, cuando estos llegan a la fundación del edificio provocan su movimiento y, luego, se transfiere al resto del edificio de una manera muy compleja. Estos movimientos generan fuerzas que pueden ocasionar mucho daño. El movimiento de la tierra en el sitio que se encuentra un edificio es muy complicado. No es una onda armónica simple sino una superposición de muchas ondas de frecuencias y amplitudes diferentes.

Además la vibración del piso es el movimiento oscilatorio del piso alrededor de su posición de equilibrio. Cuando todo el edificio se mueve, el piso también se mueve. Sin embargo, este puede tener un movimiento independiente o superpuesto al movimiento del edificio como un todo.

Figura 1: Puente de Tacoma, en el instante del incidente.

II. SERIES DE FOURIER

Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica *f(t)* de período T=2π/ω en la que el conjunto base es el conjunto de funciones seno, obteniéndose una representación expandida de la forma

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(n\omega t + \varphi_n) \tag{1}$$

Más tarde, fue Joseph Fourier quién desarrolló el método hasta un nivel útil en casos más generales; una función arbitraria puede ser representada por una serie trigonométrica de la forma

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{2}$$

o bien en notación compleja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \tag{3}$$

en donde:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{6}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx \tag{7}$$

Es necesario estudiar el impacto de las frecuencias en las distintas edificaciones, estas se deben a acciones dinámicas, para así poder mantener y mejorar su estabilidad. Cada material dispone de una frecuencia natural de oscilación, y al ser sometido a esta luego de un lapso de tiempo se termina rompiendo.

Hay diversas acciones dinámicas (son aquellas que varían a lo largo del tiempo) que ponen en riesgo las estructuras, por ejemplo; el viento, el oleaje rompiendo sobre un dique, un sismo originado por un terremoto, etc.

Un ejemplo práctico y por todos conocido de lo anteriormente comentado, es lo sucedido en el puente de Tacoma. El efecto dinámico de un viento a 60Km/h hizo, literalmente, romper el puente como si se tratara de una hoja de papel.

Por tanto, es fácil comprender que en el campo de la dinámica, el periodo natural T y consecuentemente la frecuencia natural *f*, juegan un papel sumamente importante en los edificios y estructuras.

III. RESPUESTA A UNA CARGA PERIÓDICA

Es importante destacar que cualquier carga periódica se puede expresar en función de la suma de los términos de las distintas componentes armónicas, siempre que se cumpla: número finito de discontinuidades y un máximo y mínimo dentro de un período T.

En la práctica, se aprecia como la distribución de los sucesivos términos es cada vez más chica, siendo necesario incluir los primeros términos para tener una buena aproximación.

En sistemas sin amortiguamiento, la respuesta estacionaria viene dada por:

Para una carga, de magnitud p_0 :

$$u(t) = \frac{\rho_0}{k} \tag{8}$$

Para una carga tipo seno:

$$u(t) = \frac{\rho_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2} sen(\Omega_1 t) \tag{9}$$

Para una carga tipo coseno:

$$u(t) = \frac{\rho_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2} cos(\Omega_1 t) \tag{10}$$

donde $\beta = \frac{\Omega_1}{\omega}$

siendo:

ω:frecuencia natural del sistema.

Ω_1:frecuencia excitadora.

Para sistemas amortiguados, la respuesta de una carga tipo seno:

$$u(t) = \frac{\rho_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\{(1-\beta^2)sen(\Omega_1 t) - 2\xi\beta\cos(\Omega_1 t)\} \tag{11}$$

Además, tipo coseno:

$$u(t) = \frac{\rho_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\{2\xi\beta sen(\Omega_1 t) + (1-\beta^2)\cos(\Omega_1 t)\} \tag{12}$$

La respuesta estacionaria que genera un sistema sin amortiguamiento a una carga periódica está representada por :

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_1 t) \; + \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(\, n\Omega_1 t) \tag{13}$$

es

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}\cos(n\Omega_1 t) + \; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}\mathrm{sen}(n\Omega_1 t) \tag{14}$$

donde $\beta_n = \frac{n\Omega_1}{\omega}$

Además, la respuesta para un sistema amortiguado se puede expresar de la siguiente manera:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}[\{a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)\}\,\mathrm{sen}(n\Omega_1 t) + \{a_n(1-\beta_n)^2 - b_n 2\xi\beta_n\}\cos(n\Omega_1 t)] \tag{15}$$

El parámetro $\boldsymbol{\xi}$ utilizado en las expresiones anteriores, hace referencia al factor de amortiguamiento, es decir, el cociente entre el amortiguamiento del sistema y el amortiguamiento crítico: $\xi = \frac{C}{C_c}$

IV. Conclusiones

La utilización de Fourier nos permite, descomponer funciones temporales en funciones frecuenciales, las cuales son necesarias para obtener respuestas a los distintos problemas que puedan surgir:

- Obtener los desplazamientos de una estructura sometida a una acción dinámica, para así poder obtener leyes de esfuerzos y proseguir el modelado y estudio de la misma.
- Verificar el estado en que se encuentra una estructura que ha sufrido daños, y/o desgaste debido a excitaciones dinámicas. Para así poder, luego de un análisis previo, obtener frecuencias propias y vincularlas con pérdidas de rigidez y estabilidad.
- Lograr aproximaciones del amortiguamiento estructural.

Son comunes los problemas en ingeniería, vinculada a la construcción, en los que los parámetros pueden ser función de las frecuencias excitadoras, como en el caso de interacción suelo-estructura o fluido-estructura. Para estos casos se utiliza el análisis en el dominio de la frecuencia.

Referencias

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Joseph_Fourier

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Frecuencia_natural

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_modal_utilizando_FEM

[4] Cienciamatemática, *el mayor portal de recursos educativos a tu servicio*, [internet], Jorge A. y Olvera R., *"Análisis de Fourier y sus aplicaciones"*, disponible en http://www.cienciamatematica.com/descarga/calculo/analisis_de_Fourier.pdf

[5] Imac, *Ingeniería mecánica aplicada y computacional*, [internet], http://www.imac.unavarra.es, departamento de ingeniería mecánica, energética y de materiales, *"Anexo: análisis de Fourier"*, disponible en http://www.imem.unavarra.es/EMyV/pdfdoc/vib/vib_fourier.pdf

[6] Alejandro Miguel de Tejeda, *"Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia"*, disponible en, http://oa.upm.es/9546/1/Alejandro_de_Miguel_Tejada.pdf