Resolución de circuitos RL mediante el uso de Laplace

Lagleyze Eugenio

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
elagleyze@gmail.com

JULIO 2011

Resumen: En este informe se muestra un uso muy frecuente de la transformada de Laplace, que es el análisis de circuitos eléctricos para saber su comportamiento en función del tiempo.

Palabras claves: Transformada de Laplace-Circuitos RL- Corriente-Resistores-Inductores-

I. INTRODUCCIÓN

La forma usual de la transformación de Laplace es:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

Habiendo transformado una f (t) dada a la correspondiente F(s), aplicando a esta F(s) las operaciones necesarias para resolver problemas de circuitos eléctricos en estados transitorios. Lo interesante de utilizar esta transformada es que se transforman ecuaciones diferenciales en el dominio t (tiempo) en ecuaciones algebraicas en el dominio s (frecuencia). Esto significa que una onda, en vez de estar descripta como función del tiempo, se describe en función de componentes de frecuencia. La principal razón de utilizar estas transformaciones es que las matemáticas son más fáciles en el dominio de frecuencia.

Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos:

- Resistores(que tienen un resistencia R, medida en ohm (Ω))
- Capacitores(que tienen una capacitancia C, medida en faradios (F))
- Inductores (que tienen una inductancia L, medida en henrys (H))

Estos elementos tienen asociados la corriente (*i(t)* medida en amperes A) y el voltaje o tensión (*v(t)* medido en volts V). El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga (q(t) medida en coulombs C) mediante la siguiente relación

$$i = {}^{dq}/_{dt}$$

Convencional mente los elementos básicos se representan simbólicamente como muestra la figura 1.

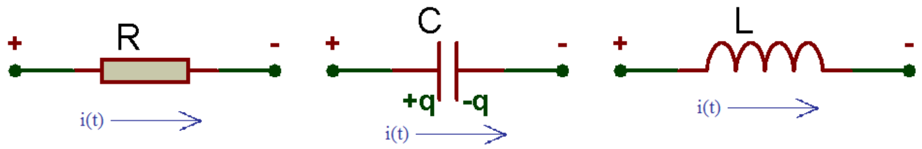


Figura 1: Resistor(R), Capacitor(C), Inductancia(L)

II. COMPORTAMIENTO DE UN CIRCUITO ELECTRICO RL

La interacción entre los componentes individuales de un circuito eléctrico esta dada por las leyes de Kirchhoff que enuncian lo siguiente:

1. La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier nodo del circuito es cero.
2. La suma algebraica de la caída de tensión alrededor de cualquier lazo en un circuito es cero.

El uso de estas leyes es muy importante para describir el comportamiento de un circuito eléctrico, estas se pueden analizar usando la transformada de Laplace.

A continuación se utilizará la transformada de Laplace para encontrar la onda de corriente en el tiempo del siguiente circuito eléctrico RL (ver figura 2)

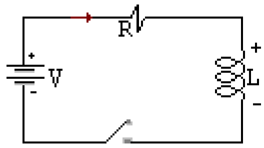


Figura 2

Sea una tensión de batería constante de v=1 volt aplicados a un resistor (R) y a un inductor (L) en serie como muestra la figura 2.

Primero se analiza la función de tensión en componentes exponenciales por la ecuación (1). La tensión, es una función de escalón unitario, que la representaremos como u(t) de la siguiente manera

$$u(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t > 0 \end{cases}$$

Si remplazamos en la ecuación f(t) por u(t) dando como resultado la transformada de Laplace de u(t)

$$F(s) = \int_0^\infty (1)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

La función impedancia (Z) del circuito es

$$Z = R + j\omega L \quad o \; Z(s) = R + Ls$$

Haciendo la división de la trasformada de la tensión y la impedancia (Z) se obtiene la función transformada de la corriente. Se utilizará V(s) para la transformada de la tensión e I(s) para la transformada de la corriente, obteniendo

$$V(s) = \frac{1}{s}$$

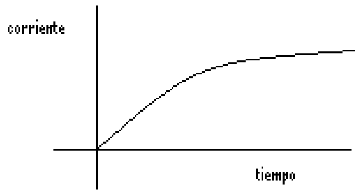
$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{1/_s}{R + Ls} = \frac{1}{L}\frac{1}{s(s + {}^R/_L)}$$

Aplicando fracciones simples a la ecuación de I(s) se obtiene

$$I(s) = \frac{1}{L}\left(\frac{{}^L/_R}{s} + \frac{-{}^L/_R}{(s + {}^R/_L)}\right)$$

Luego aplicando la anti transformada de Laplace a la ecuación anterior se obtiene la función corriente en el tiempo i(t).

$$i(t) = \frac{1}{L}\left(\frac{L}{R} - \frac{L}{R}e^{-R/_L t}\right) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-R/_L t}\right)$$



III. CONCLUSIONES

Como conclusión se pude decir que es muy útil utilizar la trasformada de Laplace, ya que simplifica enormemente los cálculos, porque se pasa de resolver ecuaciones diferenciales en el dominio tiempo a ecuaciones algebraicas en el dominio de frecuencia.

REFERENCIAS

[1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson educación, México 2002 Segunda edición disponible en biblioteca central de la Universidad Nacional del Sur. Páginas 97 a 132.

[2] H. Hildreth Skilling, *Circuitos en Ingeniería Eléctrica*, Compañía Editorial Continental, México 1973 Quinta edición. Páginas 567 a 578.