Transformada de Laplace – Fenómenos Nucleares Funciones de Variable Compleja

Junca Christian Andrés

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
chrisjunca@hotmail.com
Junio 2014

Resumen: En este trabajo se buscará demostrar la importancia de la Transformada de Laplace en situaciones referidas al ámbito de la física nuclear, específicamente la desintegración nuclear. A partir de la utilización de la Transformada se logrará resolver la ecuación diferencial lineal con el objetivo de obtener la respectiva función que explica el fenómeno físico de la desintegración de un numero N de núcleos radiactivos.

Palabras clave: Transformada de Laplace, Desintegración Radiactiva, Ecuaciones Diferenciales, Física Nuclear.

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos matemáticos han sido aplicados a muchos de los campos científicos, uno de los más interesantes es el de la descripción de fenómenos naturales. El comportamiento de estos fenómenos, como la desintegración radioactiva, puede ser plasmado a partir de una ecuación diferencial. La mayoría de estas ecuaciones suelen ser no-lineales y difíciles de resolver, ya que la función incógnita o sus derivadas están multiplicadas por si mismas o aparecen en forma de funciones compuestas.

Si bien el comportamiento de la desintegración nuclear puede escribirse a partir de una ecuación diferencial lineal, su resolución implica el uso de herramientas algebraicas como pueden ser el uso de series de potencias, series de Fourier o Transformada de Laplace. En este informe realizaremos la explicación de cómo puede utilizarse la Transformada de Laplace en la resolución de dicha ecuación diferencial y de la potencialidad de dicha herramienta matemática.

II. USO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de manera directa mediante trabajo algebraico puede ser un tanto engorroso. Las ecuaciones a resolver se caracterizan por ser lineales y tener coeficientes constantes, es decir, poseen la siguiente forma:

$$a0(y)^{(n)} + a1(y)^{(n-1)} + a2(y)^{(n-2)} + a3(y)^{(n-3)} + \ . \ . \ . \ + a(n-1)(y)^{(2)} + an(y) + b = 0 \qquad (1)$$

La Transformada de Laplace es una herramienta mediante la cual se puede resolver estas ecuaciones de manera indirecta. Resolver la ecuación diferencial consta en hallar la función *f (t),* o en el caso anterior la función y. Entre las propiedades de la Transformada de Laplace se encuentra una que relaciona la derivada n-ésima de una función *f (t)* con la Transformada de la función y en donde intervienen sus derivadas anteriores [1]. La propiedad es la siguiente:

$$£\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f^{(1)}(0) - \ . \ . \ . \ - s^1 f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \qquad (2)$$

A partir de la aplicación de la Transformada sobre la ecuación diferencial se logra reducir la misma a un mero trabajo algebraico en donde se busca despejar *F(s)*. Por último, se procede a anti-transformar *F(s)* logrando obtener la respuesta a la ecuación diferencial, es decir, la *f (t).*

Normalmente, luego de aplicar la transformada sobre la ecuación y de despejar *F(s),* suelen quedar cociente de polinomios haciendo más difícil el proceso de anti-transformación. Esta anti-transformación puede implicar tener que hacer la división entre los polinomios o descomponer en fracciones parciales y luego aplicar la anti-transformada a cada cociente de manera individual.

III. Aplicación específica: Desintegración Radioactiva

A. *Introducción*

La radiactividad se trata de un fenómeno físico en el que los núcleos de ciertos elementos producen radiaciones, estas radiaciones se pueden utilizar para ionizar gases, impresionar placas radiográficas, atravesar cuerpos opacos, entre otros.

La radiactividad se trata de una propiedad de los isotopos, por los cuales también son denominados "inestables". Esta inestabilidad se debe a que las capas electrónicas o nucleares se encuentran en un estado de excitación y se encuentran perdiendo energía constantemente mediante emisiones electromagnéticas y de partículas. Una de las consecuencias es la llamada "Desintegración Radiactiva" o "Período de semidesintegración radiactiva" [3].

B. *Conceptos básicos sobre Desintegración Radiactiva*

La desintegración radiactiva se trata de un proceso a través del cual los átomos van liberando energía, es decir, un proceso de reordenamiento de energía. El núcleo de un átomo se compone de protones y neutrones unidos, cuando entran en estado radiactivo (sea natural o artificialmente) tienden a buscar estabilidad mediante la liberación de energía como antes mencionamos. En el proceso, el núcleo puede lograr la estabilidad deseada o desintegrarse. Existen tres tipos de desintegración radiactiva:

i. Desintegración alfa: El núcleo emite partículas compuestas por 2 protones y 2 neutrones haciendo que el n° atómico disminuya en relación a la perdida de protones y el número másico en 4, esta radiación no suele atravesar la materia debido a que se tratan de partículas de tamaño considerable.

ii. Desintegración Beta: En este caso, el núcleo emite un electrón, haciendo que su n° atómico aumente en 1 unidad pero su número másico quede intacto. La radiación emitida puede ser tanto beta negativa (emisión de electrones) como beta positiva (emisión de protones).

iii. Desintegración Gama: Se trata de emisión de fotones de altas energías, no hay variación de masa ni de n° atómico [2].

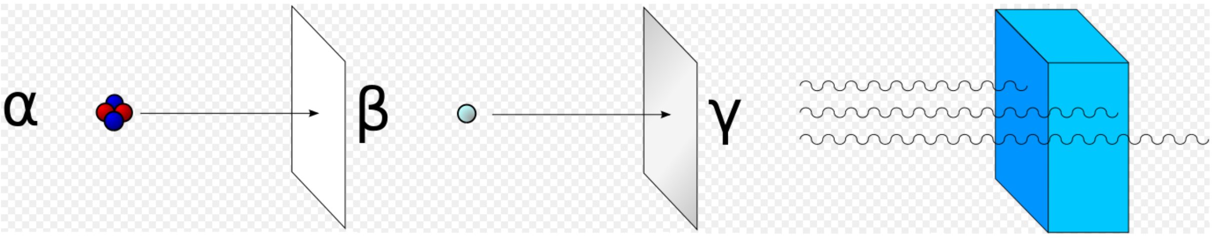

Figura 1: Diferentes tipos de desintegración Radiactiva

C. *Relación de la matemática con el fenómeno físico*

La probabilidad de que un átomo se desintegre puede describirse a partir del estudio experimental del fenómeno. Es imposible de predecir de qué manera se llevará a cabo y en qué tiempo la desintegración de una partícula, pero puede realizarse una estimación del mismo mediante una ecuación matemática (figura 2). Se puede observar que el tiempo de vida de un átomo varía entre unos simples segundos a millones de años.

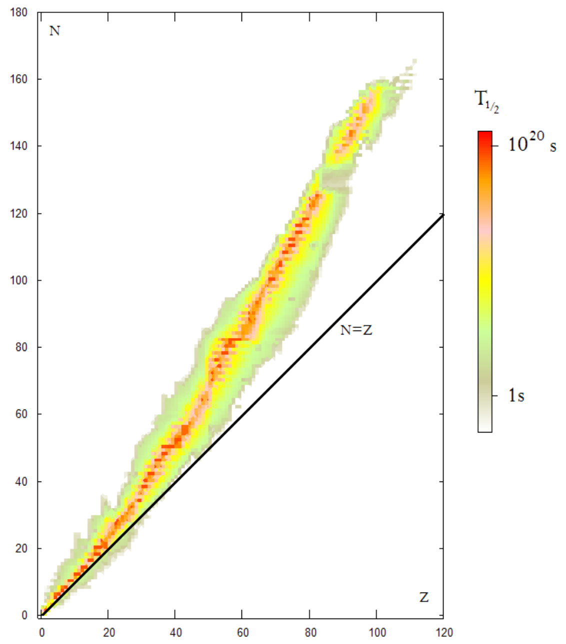

Figura 2: Tiempo de vida de los átomos dependiendo de su n° atómico y n° másico

La precisión de la estimación depende, obviamente, del número de muestras que se tomen en el estudio experimental, pero puede aproximarse la velocidad a la que se desintegra el núcleo a la siguiente:

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) \qquad (3)$$

Esta aproximación indica que la velocidad de decaimiento de la cantidad de átomos, es decir, de la desintegración de los núcleos, es igual al número de átomos que se encuentran en un determinado tiempo t=T multiplicado por una constante propia de la desintegración del tipo de núcleo radiactivo en cuestión.

D. Aplicación de las herramientas matemáticas en la resolución de la ecuación diferencial

A partir de la ecuación diferencial (3) se debe proceder a encontrar dicha función N(t) que cumpla esa relación, es decir, que para todo valor ‘t’ la función N sea igual al valor negativo de la derivada primera de N {N’(t)}.

La resolución se lleva a cabo aplicando los pasos expuestos de la siguiente manera:

i. Aplicar la Transformación de Laplace a ambos lados de la igualdad

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) \;\; => \;\; £\left\{-\frac{dN(t)}{dt}\right\} = £\{\lambda\, N(t)\} \;\; => \;\; -sN(s) + N(0) = \lambda N(s) \qquad (4)$$

ii. Trabajo algebraico de la expresión obtenida en términos de N(s)

$$-sN(s) + N(0) = \lambda N(s) => N(s)(\lambda + s) = N(0) => N(s) = \frac{N(0)}{(s+\lambda)} \qquad (5)$$

iii. Aplicar Anti-transformación de Laplace a ambos lados de la igualdad

$$N(s) = \frac{N(0)}{(s+\lambda)} => £^{-1}\{N(s)\} = £^{-1}\left\{\frac{N(0)}{(s+\lambda)}\right\} => N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (6)$$

Luego de aplicar el procedimiento explicado llegamos a la conclusión que la desintegración nuclear se encuentra dada por la ecuación N(0) $e^{-\lambda t}$, donde N(0) es la cantidad de núcleos que generan radiactividad en el instante inicial y λ la constante de desintegración propia del tipo de los núcleos con lo que se están tratando (6).

Por lo tanto conociendo la constante propia de desintegración del núcleo que se quiere estudiar y la cantidad de núcleos inestables en el instante considerado como inicial, se puede conocer de qué forma van disminuyendo en cantidad con el paso del tiempo, es decir, como se van desintegrando dicho conjunto. La ecuación antes encontrada se trata de la Ley de Desintegración, dicha ley sirve a la hora de evaluar la desintegración de los diferentes tipos de elementos e isotopos con tendencias radiactivas.

Por ejemplo, en nuestro interior de desintegran aproximadamente 15 millones de átomos de potasio y unos 7 mil átomos de uranio por hora.

IV. CONCLUSIÓN

Se ha podido demostrar la utilidad de la Transformada de Laplace a la hora de simplificar los cálculos en la resolución de una ecuación diferencial lineal de cierto grado de complejidad que hubiera sido difícil de resolver únicamente mediante trabajo algebraico.

Esto deja la pauta de la potencialidad de esta herramienta, a la hora de encarar la búsqueda de funciones que encajen dentro de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales lineales que describen los procesos de la vida cotidiana y la ciencia.

En conclusión, el tener presente la posibilidad de utilizar la Transformada de Laplace es de suma importancia a la hora de encarar problemas matemáticos.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. 1er. Cuatrimestre 2014, paginas 48-53.

[2] D. Ebbing, y S. Gammon, "General Chemistry", Cengage Learning, 9na edición, 2007.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Radiactividad, [acceso el 16 de junio de 2014].