

Función transferencia y estabilidad en sistemas

Juan Alberto Regalado Galván

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
00jarg@gmail.com
Marzo 2014

Resumen: En este informe se pretende demostrar uno de los usos de la transformada de Laplace en la ingeniería. La función transferencia se construye calculando la transformada de Laplace de la función de salida del sistema sobre la transformada de la función de entrada. Con esta función transferencia, se puede hacer un análisis de la estabilidad del sistema que se modela, entre otras cosas.

Palabras clave: transformada de Laplace, función transferencia, estabilidad.

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos de la transformada de Laplace tienen un papel clave en el enfoque moderno al análisis y diseño en los sistemas de ingeniería. Aquí aplicaremos la transformada de Laplace para hallar la función transferencia de un sistema en particular, la cual nos permitirá analizar la estabilidad del sistema.

II. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la razón de la transformada de Laplace de la salida del sistema (o función de respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada del sistema (o función de fuerza), bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero (i.e. el sistema está inicialmente en un estado de reposo).

Las funciones de transferencia se usan frecuentemente en ingeniería para caracterizar las relaciones de entrada-salida de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, y juegan un papel importante en el análisis y diseño de dichos sistemas.

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u \quad (1)$$

donde $n \geq m$, las a y las b son coeficientes constantes, y $x(t)$ es la respuesta del sistema o salida correspondiente a la entrada o término de fuerza $u(t)$ aplicado en el tiempo $t = 0$. Aplicando la transformada de Laplace a todo (1) llegaremos a la ecuación transformada. Como se supone que todas las condiciones iniciales son cero, vemos de (1) que, para obtener la ecuación transformada, simplemente reemplazamos d/dt por s , obteniendo

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)X(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)U(s) \quad (2)$$

donde $X(s)$ y $U(s)$ denotan las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $u(t)$ respectivamente.

La función de transferencia del sistema se define como

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (3)$$

en la cual, para hacer que el sistema sea físicamente realizable, los grados m y n de los polinomios $X(s)$ y $U(s)$ deben ser tales que $n \geq m$. Esto se debe a que si $m > n$ la respuesta del sistema $x(t)$ a una entrada realista $u(t)$ involucrará impulsos.

La ecuación $U(s) = 0$ es llamada ecuación característica del sistema, su orden determina el orden del sistema y sus raíces se conocen como los polos de la función transferencia. De la misma manera, las raíces de $X(s) = 0$ son los ceros de la función transferencia.

III. ESTABILIDAD

La estabilidad de un sistema es una propiedad de vital importancia para los ingenieros. De manera intuitiva podemos ver un sistema estable como uno que permanece en reposo a menos que sea excitado por una fuente externa, y retorna al reposo si se quitan tales influencias externas. Así un sistema estable es uno cuya respuesta, en la ausencia de una entrada, se aproximará a cero conforme el tiempo tiende a infinito. Esto garantiza entonces que cualquier entrada acotada producirá una salida acotada; esta propiedad se toma con frecuencia como la definición de un sistema lineal estable.

Es claro que la estabilidad es una propiedad del propio sistema, y no depende del sistema de entrada o de la función de fuerza. Como un sistema puede ser caracterizado en el dominio s por su función de transferencia $G(s)$, será posible usar la función de transferencia para especificar condiciones para que el sistema sea estable.

De esta manera factorizando el polinomio del denominador, y haciendo un análisis de los polos de $G(s)$ llegamos a la siguiente definición:

Definición 1 *Un sistema lineal causal invariante en el tiempo físicamente realizable con función de transferencia $G(s)$ es estable siempre que todos los polos de $G(s)$ estén en la mitad izquierda del plano s .*

IV. APLICACIÓN

Sea un motor controlado como en el esquema mostrado en la figura (1). Planteando las ecuaciones del motor en términos del torque en el motor y la corriente en el inducido tenemos:

$$T = K_t i_a \quad (4)$$

$$e = K_e \dot{\theta}_m \quad (5)$$

Donde T es el torque en el motor, K_t es la constante del torque, i_a es la corriente en el inducido, $\dot{\theta}_m$ es la velocidad del eje de rotación y K_e es la constante relacionada con la fuerza electromotriz (fem) e .

La ecuación eléctrica del circuito resulta:

$$v_a(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e \quad (6)$$

Donde R_a es la resistencia, L_a es la inductancia y v_a el voltaje de entrada como se muestra en la figura (1). Suponiendo que el motor tiene inercia J_m y coeficiente de rozamiento b . Aplicando la ecuación de Newton para sistemas rotacionales en una dimensión obtenemos:

$$J_m \ddot{\theta}_m + b \dot{\theta}_m = K_t i_a \quad (7)$$

Usando (5) en (6), suponiendo que la inductancia L_a es despreciable y aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la igualdad resulta:

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + K_e s \Theta_m(s) \quad (8)$$

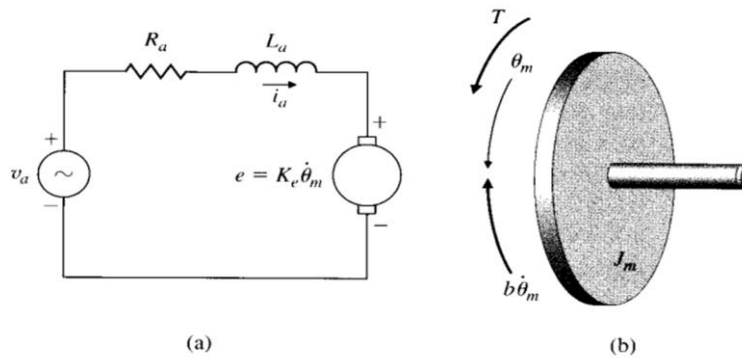


Figura 1: Motor de corriente continua: (a) Esquema eléctrico (b) Diagrama de cuerpo libre del rotor.

Notar que para denotar la transformada de Laplace de una función, usamos la misma letra de dicha función en mayúscula y aclaramos que está en función de s .

Aplicando la transformada de Laplace a (7) y despejando I_a tenemos:

$$I_a(s) = \frac{J_m}{K_t} s^2 \theta_m(s) + \frac{b}{K_t} s \theta_m(s) \quad (9)$$

Reemplazando la expresión obtenida para I_a en (8) tenemos:

$$V_a(s) = \left[R_a \left(\frac{J_m}{K_t} s^2 + \frac{b}{K_t} s \right) + K_e s \right] \theta_m(s) \quad (10)$$

Por lo que la función de transferencia queda:

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{s \left(\frac{J_m R_a}{K_t} s + \frac{b R_a}{K_t} + K_e \right)} = \frac{\frac{K_t}{R_a J_m}}{s \left(s + \frac{1}{J_m} \left(b + K_e \frac{K_t}{R_a} \right) \right)} \quad (11)$$

De aquí vemos que $G(s)$ tiene un polo en la mitad izquierda del plano s (ya que todas las constantes son positivas), pero además tiene un polo en el origen ($s = 0$). Por lo tanto se dice que este sistema es estable marginalmente; esto no asegura que una entrada acotada llevará a una salida acotada, ya que, por ejemplo, si tal sistema tiene una entrada que es un escalón $h(t)$ aplicado en el tiempo $t = 0$ entonces la respuesta será una rampa $th(t)$, que no está acotada cuando $t \rightarrow \infty$. En nuestra aplicación esto significa que, al aplicar una tensión constante en $t = 0$ la posición no está acotada, lo cual quiere decir que el motor se seguirá moviendo; ya que como la posición θ_m es en realidad el ángulo que gira el rotor, medido en radianes, el hecho de que éste continúe aumentando en el tiempo significa que el rotor seguirá girando, lo cual coincide con la experiencia.

Por otro lado podemos querer obtener la velocidad angular $\omega_m(t)$ como función de salida en nuestra función de transferencia. Notamos que:

$$\Omega_m(s) = \mathcal{L}\{\omega_m(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{\theta}_m(t)\} = s\theta_m(s) - \dot{\theta}_m(0) = s\theta_m(s) \quad (12)$$

Ya que es un sistema lineal invariante en el tiempo, donde las condiciones iniciales son cero, por esto $\dot{\theta}_m(0) = 0$ y simplemente obtenemos la nueva función transferencia $G_\omega(s)$ multiplicando por s a la antigua función $G(s)$.

$$G_\omega(s) = sG(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_a J_m}}{s + \frac{1}{J_m} \left(b + K_e \frac{K_t}{R_a} \right)} \quad (13)$$

Notamos que ahora la función tiene sólo un polo en la mitad izquierda del plano s , con lo cual el sistema es estable. Esto nos dice algo que verificamos en la práctica, esto es, al aplicar un voltaje constante (una función de entrada acotada) al motor, su velocidad es constante (función de salida acotada).

V. CONCLUSIONES

Ciertos sistemas físicos se pueden modelar usando ecuaciones diferenciales lineales, las cuales pueden ser resueltas utilizando la transformada de Laplace. En el modelo de un sistema, si podemos hallar las transformadas de Laplace de las funciones de salida y de entrada, obtendremos la llamada función de transferencia que nos permite obtener mayor información sobre el comportamiento del sistema, convirtiéndose así en una herramienta útil, tanto para el análisis como para el diseño de sistemas físicos.

REFERENCIAS

- [1] Glyn James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, segunda edición, Pearson Education, 2002.
- [2] Gene F. Franklin, J. David Powell y Abbas Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, cap. 2, tercera edición, Addison-Wesley, 1994.