

Utilización de la transformada de Laplace para obtener la función de transferencia de la amortiguación de un automóvil

Juan Manuel Gutiérrez

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
greendayjuanma@hotmail.com
Diciembre 2011*

Resumen: El siguiente informe muestra una de las aplicaciones de la transformada de Laplace en problemas físicos. En este caso, se requiere obtener la función de transferencia de la amortiguación de un automóvil de forma simplificada, es decir, que se centrará en estudiar cómo trabaja la amortiguación para reducir las vibraciones provocadas por las irregularidades del terreno. Para ello, se introducirá al lector en los conceptos de estudio de procesos dinámicos, función de transferencia, ecuaciones diferenciales y transformadas de Laplace.

Palabras clave: transformada de Laplace, función de transferencia, ecuaciones diferenciales, amortiguación, procesos dinámicos.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar a desarrollar el tema, se procederá a explicar los conceptos básicos necesarios para comprender el problema y su solución.

La amortiguación de un automóvil permite controlar la carga del vehículo, mantener las ruedas alineadas, mejorar la maniobrabilidad y, principalmente, reducir las vibraciones provocadas por la forma del terreno sobre el cual se transita. Esto se logra gracias al uso de amortiguadores, muelles (resortes) y de los neumáticos.

La función de los neumáticos en la amortiguación es la de absorber las pequeñas desigualdades del terreno. En cambio, la de los muelles es absorber las desigualdades grandes, y por último, los amortiguadores se encargan de limitar las oscilaciones del movimiento de los muelles.

El comportamiento de la amortiguación es un proceso dinámico, es decir, que es variable en el tiempo. Es por esto, que se debe describir con ecuaciones diferenciales para poder representarlo matemáticamente.

II. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE PROCESOS DINÁMICOS

En general, los procesos dinámicos pueden representarse de manera aproximada por el siguiente modelo:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (1)$$

Como la amortiguación del automóvil es un proceso dinámico, la ecuación que lo describe será similar a la anterior y para formularla utilizaremos la segunda ley de Newton, la cual indica que la sumatoria de fuerzas aplicadas a un cuerpo es igual a su masa por la aceleración, es decir:

$$\sum F = ma \quad (2)$$

Las transformadas de Laplace fueron presentadas por Pierre-Simon Laplace (1749-1827) en respuesta a la búsqueda de una solución a las ecuaciones diferenciales. El trabajo de Laplace se basó en las investigaciones de Leonhard Euler (1707-1783), logrando así transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica. Es por esta razón, que son de gran utilidad en el estudio de vibraciones y de circuitos eléctricos, como así también en la resolución de problemas matemáticos que utilizan ecuaciones diferenciales.

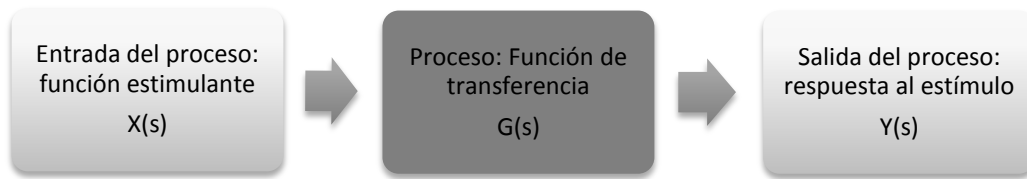


Figura 1: función de transferencia.

La transformada de Laplace se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3)$$

La función $F(s)$ es la transformada de Laplace de la función $f(t)$, también se escribe como $\mathcal{L}\{f(t)\}$. A su vez, es posible anti-transformar o invertir la función $F(s)$ para obtener nuevamente la función original $f(t)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (4)$$

Una vez que se obtiene la ecuación que describe el movimiento de la amortiguación, en base a la segunda ley de Newton, se aplica la transformada de Laplace para poder obtener la función de transferencia. Esta función es un modelo matemático que relaciona la forma en que responde un sistema con respecto a una señal de entrada. Es decir, que describe cómo reacciona un sistema frente a un estímulo.

La ecuación de la función de transferencia es la siguiente:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (5)$$

Donde $X(s)$ es la entrada del proceso (estímulo), e $Y(s)$ es el cambio en la salida del proceso (respuesta al estímulo). Matemáticamente, $X(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de entrada, e $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta del sistema.

III. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA DE AMORTIGUACIÓN DE UN AUTOMÓVIL

Para encontrar la función de transferencia, primero se debe plantear el problema y encontrar la ecuación que describe el movimiento de la amortiguación del automóvil en función del tiempo. Para simplificar el problema se estudiará el proceso en una de las ruedas según la figura 2 dada.

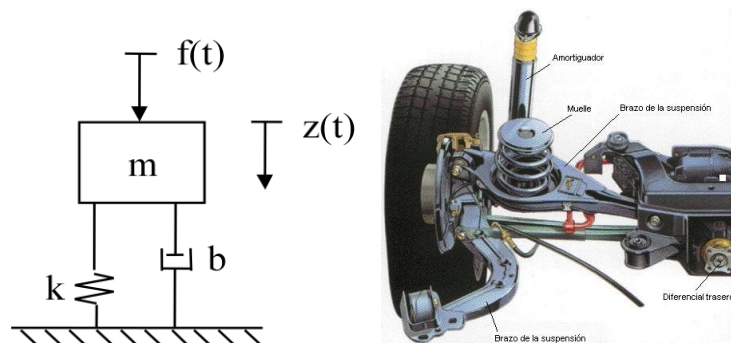


Figura 2: diagrama de la amortiguación del automóvil.

- k : representa el muelle o resorte, y también será considerado como la constante elástica del mismo.
- b : representa el amortiguador.
- $f(t)$: representa la fuerza de entrada.
- $z(t)$: representa el desplazamiento o respuesta del sistema.

Se utiliza la ecuación (2) para modelar el problema de la siguiente forma:

$$\sum F = ma = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \quad (6)$$

$$f(t) - f_{\text{muelle}}(t) - f_{\text{amortiguador}}(t) = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \quad (7)$$

$$f(t) - kz(t) - b \frac{dz(t)}{dt} = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \quad (8)$$

Como se puede observar, la ecuación (8) respeta la forma de (1), es decir que describe un proceso dinámico que varía en el tiempo, mediante una ecuación diferencial. Para poder resolverla, se debe aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros, considerando que $z(0) = z'(0) = z''(0) = 0$. Por lo tanto, se obtiene:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) - kz(t) - b \frac{dz(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{m \frac{d^2 z(t)}{dt^2}\right\} \quad (9)$$

$$F(s) - kZ(s) - bsZ(s) = ms^2 Z(s) \quad (10)$$

$$F(s) = ms^2 Z(s) + kZ(s) + bsZ(s) \quad (11)$$

$$F(s) = Z(s)[k + bs + ms^2] \quad (12)$$

$$\frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{k + bs + ms^2} \quad (13)$$

De (5) y (13) resulta:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{k + bs + ms^2} \quad (14)$$

La ecuación (14) es la función de transferencia buscada.

En la figura 3 se puede observar un esquema de la aplicación de la función de transferencia de la amortiguación de un automóvil a modo de ejemplo.

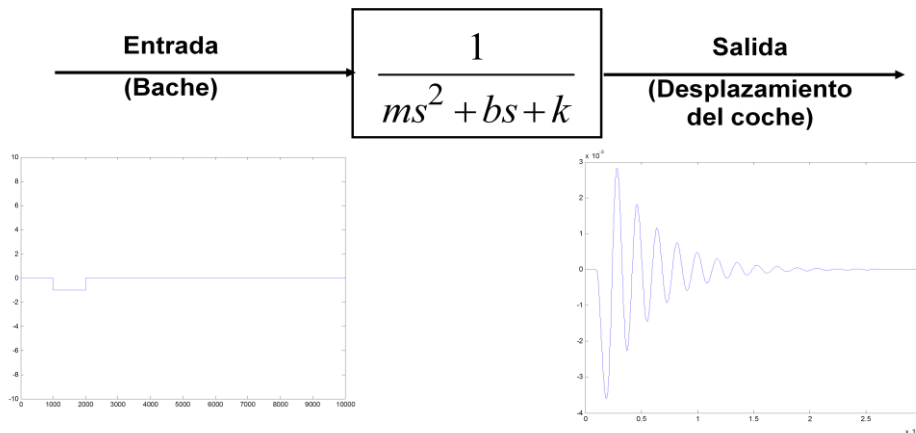


Figura 3: ejemplo de aplicación de la función de transferencia en la amortiguación de un automóvil.

IV. CONCLUSIONES

En conclusión, se puede afirmar que la transformada de Laplace resulta ser una herramienta muy útil para resolver ecuaciones diferenciales, y se aplica para resolver problemas de circuitos eléctricos y de vibraciones, entre otros.

REFERENCIAS

- [1] G. Calandrini, “*Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variables Compleja*”, 2do cuatrimestre 2010.
- [2] G. James, “*Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*”, Pearson Educación, 2002.
- [3] Niño, Elvira. “Aplicaciones reales de la transformada de Laplace”, [internet], disponible en <http://www.slideshare.net/gabriellacayo/aplicaciones-reales-laplace-8485102>, [acceso diciembre de 2011].
- [4] Ogata Katsuhiko, “*Ingeniería de control moderna*”, Pearson Alhambra, 4ta edición, pp.130-131, 2003.
- [5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki>, [acceso diciembre de 2011].