

Matemáticas detrás de la música electrónica: análisis de Fourier en la síntesis de sonido

Pisula Juan Ignacio

Estudiante de Ingeniería electricista

Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina

juanigpisula@gmail.com

Agosto 2015

Resumen: En este trabajo se estudiarán los fundamentos teóricos detrás de los sintetizadores: instrumentos musicales electrónicos que generan sonido a partir de la conversión de señales eléctricas en sonido, mediante un parlante. Aquí entra en juego el análisis de Fourier, ya que esto permite estudiar a la señal de audio como la superposición de armónicos, lo que admite comprender los procesos llevados a cabo por el sintetizador y las diferentes técnicas de síntesis utilizadas. Se mostrarán las partes básicas de un sintetizador y modelos matemáticos de los mismos, que son aplicables al procesamiento digital de señales (de audio, en este caso).

I INTRODUCCIÓN: LOS SINTETIZADORES

Un sintetizador es un instrumento musical electrónico. Su funcionamiento se basa en la generación de señales eléctricas que son convertidas a sonido mediante un parlante. Si bien suelen estar asociados a los teclados, el sintetizador en sí es lo que genera el sonido, luego existen varias formas de activarlo: mediante un secuenciador, controlador MIDI, un teclado, pads electrónicos de batería, hasta mediante un controlador de viento.

Su historia se remonta a 1876, cuando Elisha Gray, ingeniero electricista estadounidense, descubrió accidentalmente que un circuito electromagnético que vibraba podía generar sonido, aunque este tipo de sintetizador era más un fenómeno electromecánico que electrónico. A partir de aquí, el avance tecnológico permitió que se diversificaran los tipos de sintetizadores. La invención de las válvulas de vacío y la entrada a la era electrónica permitió que aparezcan los primeros órganos Hammond, y los theremin. Ya a mediados del siglo pasado sucedió lo mismo con los transistores: se inventaron los famosos sintetizadores Moog que, aunque eran monofónicos (solo podían generar una nota a la vez), alcanzaron gran masividad. El desarrollo de la tecnología dejó la monofonía atrás, y hoy en día los sintetizadores polifónicos son utilizados constantemente en la música popular: desde los primeros sintetizadores electrónicos polifónicos como el Prophet V hasta los sintetizadores virtuales que requieren de una computadora portátil para funcionar.

La invención de los distintos tipos de sintetizadores vino de la mano de la invención de distintos tipos de síntesis de sonido: síntesis aditiva (utilizada por los primeros sintetizadores, como los órganos Hammond), sustractiva (asociada a los Moog, Prophet, Oberheim y demás teclados que masificaron la popularidad de los sintetizadores y siguen siendo usados hoy en día), FM, granular, basada en samples (muestras), resíntesis, por modelado físico (que utiliza algoritmos y procesamiento digital de señales para simular un instrumento u otra fuente física de sonido), y un largo etcétera.



1. Antiguo sintetizador basado en resonadores Helmholtz.

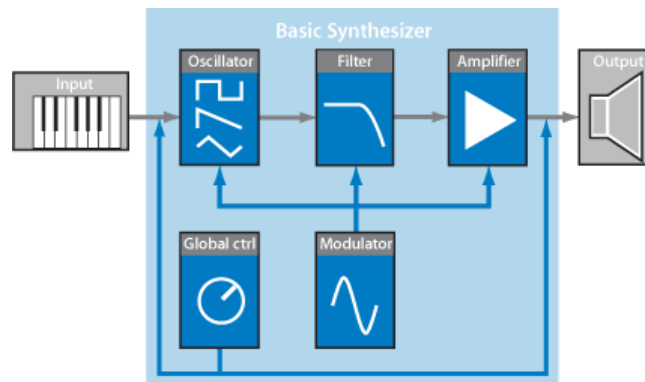


2. Sintetizador Minimoog y su réplica virtual corriendo en un iPad de Apple.

II ESTRUCTURA BÁSICA DE UN SINTETIZADOR:

Un operador de un sintetizador (¿instrumentista quizás?) controla el sonido producido por este por medio de etapas (ya sean circuitos o etapas virtuales). A continuación, las veremos sin mucho detalle para más tarde mostrar cómo pueden ser modeladas matemáticamente:

- **Osciladores:** General la señal “cruda”. Dando dos ejemplos, son los VCOs (del inglés *Voltage Controlled Oscillator*) los que generan una señal rica en armónicos en los sintetizadores sustractivos, para luego ser filtrada y obtener el sonido deseada, mientras que en la síntesis aditiva de armónicos la señal se construye mediante la adición de ondas senoidales puras.
- **Filtro:** Esenciales en la síntesis sustractiva (mediante el VCF ó *Voltage Controlled Filter*). Le dan forma al sonido al permitir o no el paso de determinadas frecuencias a través de ellos.
- **Amplificador:** Toman la señal procesada y la amplifican, antes de que esta pase por un amplificador externo. En los sintetizadores sustractivos esto sucede mediante VCA (*Voltage Controller Amplifier*).
- **Envolvente:** Comúnmente conocido como ADSR (Attack, Decay, Sustain, Release). Determinan la amplitud de la señal a medida que evoluciona en el tiempo.
- **LFO:** *Low Frequency Oscillator*. Es un oscilador especial que oscila a baja frecuencia, para modular el sonido rítmicamente.



3. Cadena de la señal de un sintetizador

III FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA

En esta sección definiremos ciertos conceptos que luego serán utilizados.

• **Serie de Fourier:** dada en su forma trigonométrica como:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

O en su forma compleja:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (2)$$

Para una $f(x)$ definida en el intervalo $[-L, L]$. Los coeficientes de la serie estarán dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n \in \mathbf{N}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n \in \mathbf{N}$$

$$Y_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{\frac{-in\pi x}{L}} dx \quad n \in \mathbf{Z}$$

•Transformada Discreta de Fourier

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} \quad j = 0, \dots, n - 1. \tag{3}$$

•Convolución discreta

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] \tag{4}$$

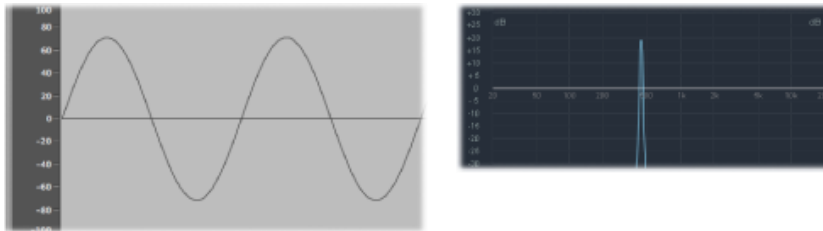
IV MODELADO MATEMÁTICO DE LOS PROCESOS EN LA SÍNTESIS DE SONIDO
A. LOS TIPOS DE ONDA

A continuación, analizaremos algunas ondas producidas por distintos tipos de osciladores. Estas señales eléctricas (que luego se convierten en sonido) son periódicas, por lo que pueden ser representadas bajo series de Fourier.

◆Forma de onda senoidal:
Serie de Fourier:

$$\operatorname{sen}(x) \tag{5}$$

Representación gráfica y respuesta en frecuencia:

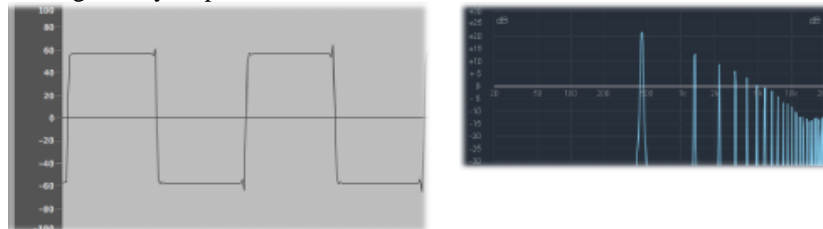


◆Forma de onda cuadrada:
Serie de Fourier:

$$\text{Forma real: } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \operatorname{sen}(2k+1)x \quad \text{Forma compleja: } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{-2i}{\pi(2k+1)} e^{i(2k+1)x}$$

(6) y (7)

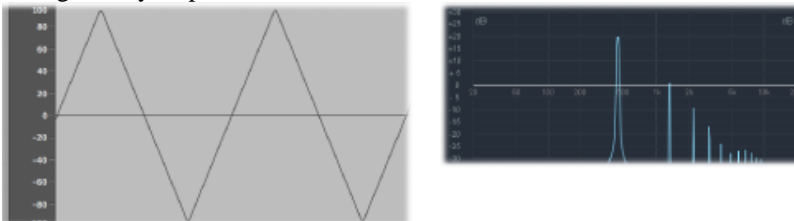
Representación gráfica y respuesta en frecuencia:



- ◆ Forma de onda triangular:
Serie de Fourier:

$$\text{Forma real: } \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad \text{Forma compleja: } \frac{\pi}{2} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} e^{j(2k+1)x} \quad (8) \text{ y } (9)$$

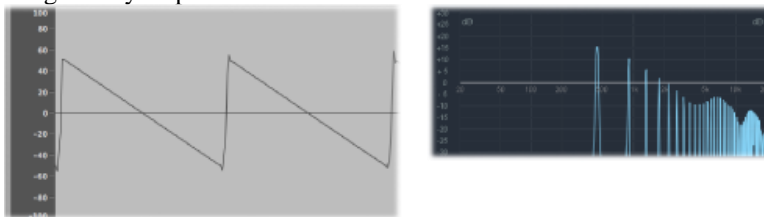
Representación gráfica y respuesta en frecuencia:



- ◆ Forma de onda diente de sierra:
Serie de Fourier:

$$\text{Forma real: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \text{sen } nx \quad \text{Forma compleja: } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx} \quad n \neq 0 \quad (10) \text{ y } (11)$$

Representación gráfica y respuesta en frecuencia:



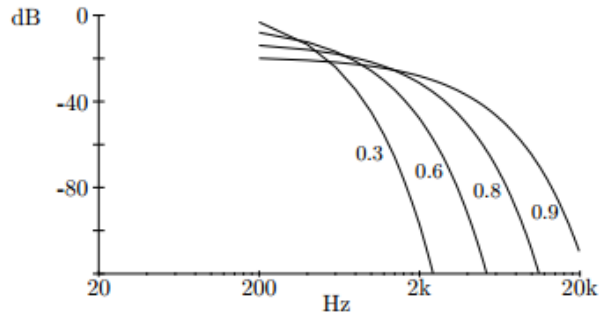
En términos de contenido armónico, las ondas senoidales sólo contienen su frecuencia fundamental; las ondas cuadradas sólo poseen armónicos que decrecen como $1/n$; las ondas triangulares sólo poseen armónicos impares que decrecen como $1/n^2$; y las ondas diente de sierra contienen todos sus armónicos, que decrecen como $1/n$.

B. EL PROCESO DE FILTRADO DE UNA SERIE

Si bien el proceso de síntesis aditiva, como ya se ha mencionado, se basa en sumar múltiples ondas senoidales puras, generadas por osciladores distintos, en el proceso de síntesis sustractiva, donde un único oscilador produce una onda rica en armónicos, el filtrado es fundamental. A continuación, veremos una aproximación sencilla al problema de filtrar una onda cuadrada, tomando la ecuación (6) y modificándola:

$$\frac{1 - |a|}{1 - |a^{H+1}|} \sum_{n=0}^H a^n \cos(2\pi(n+1)x). \quad (12)$$

Aquí tenemos una sumatoria finita, donde H indicará el será el parámetro del armónico de mayor frecuencia, y a será un parámetro que escalará cada armónico, actuando de manera similar a la frecuencia de corte del filtro. Haciendo variar a a entre $0 < a < 1$



4 Respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos sobre una onda cuadrada.

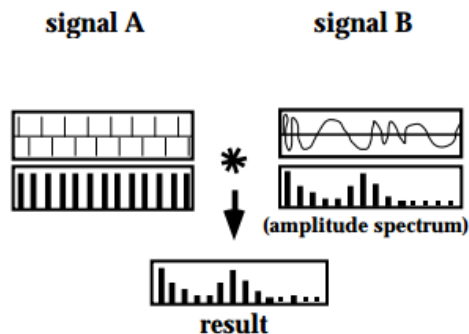
Cabe aclarar que para un análisis más detallado análisis sobre filtros, es necesario tratar al tema de transformación de Laplace y funciones de transferencia. El filtro recién mostrado es una forma simplificada de una función perteneciente al lenguaje *MPEG 4 Structured Audio* para procesamiento digital de señales.

C. SÍNTESIS CRUZADA: VOCODER

Otro tipo de sintetizador, aunque suele ser un módulo más de muchos sintetizadores de sonido es el denominado *vocoder*. El vocoder es un analizador y sintetizador que funciona bajo el principio de *síntesis cruzada*: una señal portadora y una señal moduladora son su entrada. La señal portadora, que es la señal producida por algún sintetizador de los ya mencionados, será la que aporte el espectro de frecuencia, mientras que la señal moduladora, normalmente una voz microfoneada, el rango de amplitud. Bajo la convolución de la señal portadora con la señal moduladora se obtiene una señal final.

Como este proceso suele ser digital, es necesario aplicar la *Transformada rápida de Fourier* (FFT por sus siglas en inglés), un algoritmo basado en la Transformada discreta de Fourier de la ecuación (3), a ambas señales de entrada continuas en el tiempo para su digitalización. Una vez digitalizadas se aplica el producto de convolución (4) y luego se aplica una *Transformada Inversa de Fourier* (proceso inverso a la transformada discreta, transforma un fenómeno discreto en uno continuo) para poder emitir la señal de salida.

Este proceso de síntesis cruzada también sirve para realizar síntesis sustractiva de otra manera, realizando la convolución de una señal portadora rica en armónicos con una señal envolvente de espectro, realizando así el filtrado. Son muy diversos los métodos y tipos de algoritmos para realizar las tareas que trata este informe.



5. Producto de convolucion entre una señal portadora A y una señal moduladora B



6. Vocoder siendo utilizado en vivo

V CONCLUSIONES

Como conclusión de este trabajo determinamos que el análisis de Fourier tiene una importante aplicación en la síntesis y procesamiento de audio. Permite una explicación matemática para los distintos tipos de síntesis, el filtrado de frecuencias y la digitalización de audio mediante su transformada discreta. Y a su vez estas explicaciones sirven para, por ejemplo, desarrollar algoritmos que permitan emular digitalmente los tradicionales sintetizadores, así como la creación de instrumentos virtuales originales.

REFERENCIAS

- [1] G. Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja, 2013.
- [2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki/Synthesizer>
- [3] Wikipedia, *la enciclopedia libre*, [internet], https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_r%C3%A1pida_de_Fourier
- [4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], https://es.wikipedia.org/wiki/Convoluci%C3%B3n#Convoluci.C3.B3n_discreta
- [5] *How subtractive synthesizers work*, [internet], <https://documentation.apple.com/en/logicstudio/instruments/index.html#chapter=A%26section=3%26tasks=true>
- [6] *Subtractive synthesis*, [internet], <http://electronotes.netfirms.com/TOPOMSS-Ch2a.PDF>
- [7] Zack Settel & Cort Lippe, Real-Time Musical Applications using FFT-based Resynthesis
- [8] John Lazzaro and John Wawrzynek, *Subtractive Synthesis without Filters*