Aplicaciones de Propiedades de Funciones Armónicas y Transformaciones Conformes

Pesce, Javier Alfonso

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
javierpesce@gmail.com
Agosto 2012

Resumen: Toda función analítica genera un par de funciones armónicas. El problema de encontrar una función que sea armónica en una región específica y que satisfaga las condiciones de frontera prescritas es uno de los problemas más viejos y más importantes en las ciencias basadas en la ingeniería. Algunas veces la solución puede ser encontrada por medio de un mapeo conforme definido por una función analítica.

Palabras clave: transformación, conforme, armónica.

I. INTRODUCCIÓN

El método de la transformación conforme ha sido y es utilizado en la solución de problemas de la física matemática gobernados por la ecuación de Laplace, ya que ésta es invariante cuando se aplica la transformación. Dichas aplicaciones pueden ser definidas con "usos tradicionales" del método de transformación conforme.

Por otra parte, la metodología ha sido utilizada con éxito y por cerca de medio siglo en la solución de ciertos problemas planos de la teoría matemática de la elasticidad. Pero en las dos últimas décadas el método de transformación conforme, usado por primera vez por Ptolomeo hace 1800 años, ha sido empleado en problemas diversos de la ciencia y la tecnología: acústica, vibraciones de medios continuos, problemas no estacionarios de la teoría de la difusión, etc.

Las propiedades de una función real de una variable real se reflejan en su gráfica. Pero para $w = f(z)$, con z y w complejos, no es posible hacer una gráfica análoga, porque cada uno de esos números complejos está en un plano, no en una recta. No obstante, se puede representar cierta información parcial de la función indicando pares de puntos correspondientes $z = (x, y)$ y $w = (u, v)$. A tal fin, se dibujan por separado los planos de z y w. Cuando se piensa de ese modo en una función, se habla de transformación.

II. TRANSFORMACIONES CONFORMES

En matemática, una transformación conforme es la que preserva ángulos.
Más formalmente, una transformación

$$w = f(z)$$

se dice conforme (o que preserva ángulos) en z_0. Las transformaciones conformes preservan tanto los ángulos como las formas de las figuras infinitesimalmente pequeñas, pero no necesariamente su tamaño.

III. USOS DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

Si una función es armónica – es decir si satisface la ecuación de Laplace ($\nabla^2 f = 0$)- en cierto espacio particular, y es transformada por medio de una transformación conforme en otro espacio, la función transformada también es armónica. Por esta razón, cualquier función que esté definida por medio de un potencial puede ser transformada por medio de una transformación conforme y aún seguir siendo gobernada por un potencial. En física existen múltiples ejemplos de tales funciones, entre ellas los campos electromagnéticos, los campos gravitacionales, y en dinámica de los fluidos, los flujos potenciales, que son una aproximación de los flujos de fluidos suponiendo densidad constante, viscosidad nula y flujo irrotacional.

Las transformaciones conformes son de gran utilidad para resolver problemas de la ingeniería o la física que pueden ser dificultades en su geometría. Escogiendo una transformación adecuada, el problema puede simplificarse transformando la región en la que se plantea el problema en otra de geometría más “accesible”. Por ejemplo, si se desea calcular el campo eléctrico E(z) proveniente de un punto de carga, ubicado cerca de una esquina de dos planos conductores separados por cierto ángulo (donde z es la coordenada compleja de una punto en el espacio bidimensional), utilizando una transformación conforme muy simple el ángulo es transformado (mapeado) en uno de Π (pi) radianes, haciendo que el ángulo entre los planes se transforme ahora en una línea recta (gormada por las dos semirrectas opuestas). En este nuevo dominio, el problema es de muy fácil resolución.

IV. TRANSFERENCIA DE CALOR

Para un problema de transferencia de calor las curvas de nivel de una función armónica corresponden a las isotermas, y una derivada normal cero corresponde al aislamiento térmico. Para ilustrar estas ideas, consideramos el problema simple de transferencia de calor en estado estacionario que se muestra esquemáticamente en la figura 1.

Se tiene una tubería cilíndrica con cavidad cilíndrica descentrada por la que pasa el vapor a 100º C. La temperatura exterior de la tubería es de 0º C. El radio del círculo interior es $\frac{3}{10}$ del radio de círculo exterior, así que si elegimos el radio exterior como unidad de longitud, el problema puede ser formulado como el de encontrar una función armónica *T(u, v)* tal que

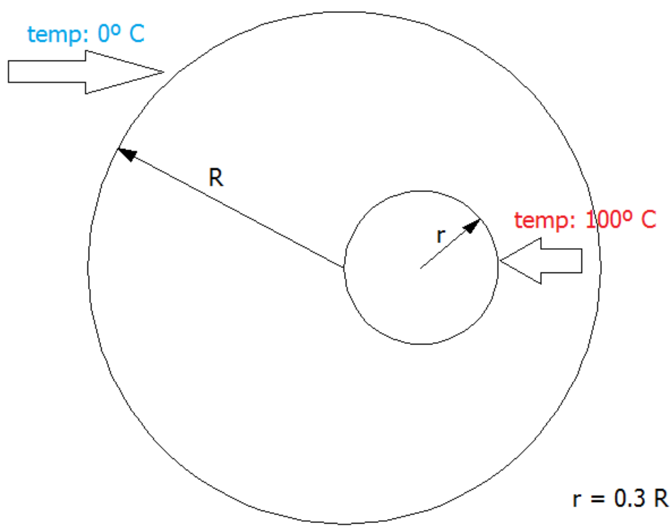

Figura 1 - Diagrama esquemático del problema de transferencia de calor.

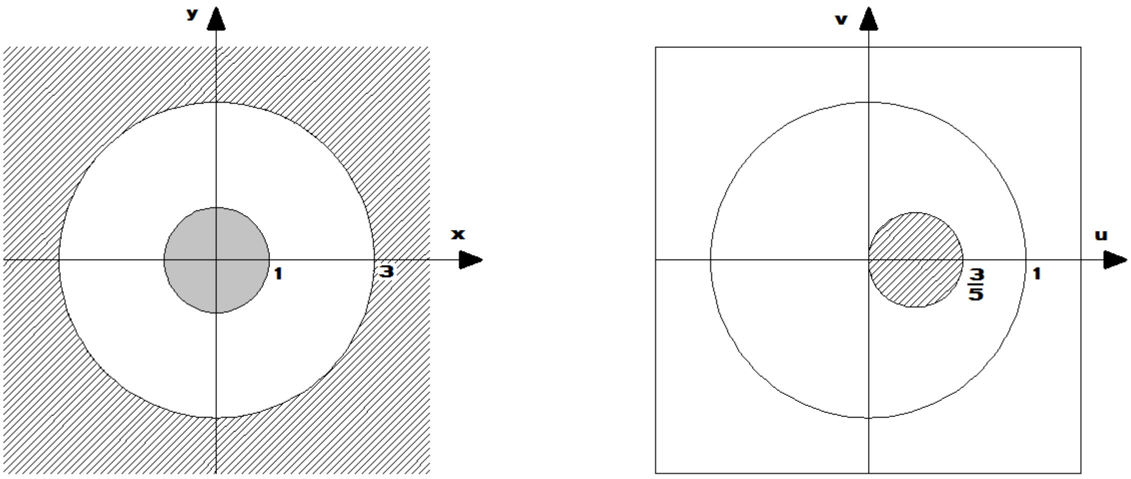

Figura 2 - mapeo w = (z-3)/(3z-1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

en la región entre los círculos $|z| = 1$ y $|z - 0.3| = 0.3$, y $T = 0$ sobre $|z| = 1$ y $T = 100$ sobre $|z - 0.3| = 0.3$.

El mapeo

$$W = \frac{z-3}{3z-1} \qquad (2)$$

transforma el círculo en el círculo $|z| = 1$ en el círculo $|w| = 1$ y el círculo $|z - 0.3| = 0.3$ en el círculo $|w| = 3$ como se muestra en la figura 2.

Así el problema es transformado en un problema de simetría axial en el plano w que consiste en encontrar una función armónica $T(u,v) = 100$ en $|w| = 1$ y $T(u,v) = 0$ en $|w| = 3$. Las funciones armónicas con tal simetría axial tienen la forma general

$$T(u,v) = A\ln(u^2 + v^2) + B, \qquad (3)$$

donde A y B son constantes.

Aquí requerimos, además de la simetría axial, que $T(u,v) = 100$ en $u^2 + v^2 = 1$ y $T(u,v) = 0$ en $u^2 + v^2 = 9$. Así $B = 100$ y A$= -100\ ln9$, y la solución en el plano w es

$$T(u,v) = \frac{100\ln[1 - \ln(u^2 + v^2)]}{\ln 9} \qquad (4)$$

Necesitamos la solución en el plano z, que en general significa que tenemos que obtener u y v en términos de x y y. Aquí, sin embargo, es un poco más fácil ya que $u^2 + v^2 = |w^2|$ y

$$|w^2| = \left|\frac{(z-3)}{(3z-1)}\right|^2 = \frac{|(z-3)|^2}{|(3z-1)|^2} = \frac{(x-3)^2 + y^2}{(3x-1)^2 + 9y^2} \qquad (5)$$

Así

(6)

$$T(x, y) = \frac{100}{\ln 9}\{1 - \ln[(x-3)^2 + y^2] - \ln[(3x-1)^2 + 9y^2]\}$$

De la ecuación (6) podemos obtener la temperatura en función de las coordenadas x, y.

V. CONCLUSIONES

Se demuestra en este informe la gran utilidad de las propiedades de las transformaciones conformes a la hora de la resolución de problemas ingenieriles. Es cuestión de encontrar la transformación adecuada, y puede trabajarse en un campo transformado más “cómodo” y así facilitar la resolución del problema, luego se anti transforma a nuestro campo de trabajo (real), y se obtiene la solución en función de nuestros parámetros iniciales.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 2do. Cuatrimestre 2011.

[2] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002, pp. 202-206.

[3] http://www.bioingenieria.edu.ar/academica/catedras/mate3/Apuntes/2008transfconforme.pdf. “Variable Compleja, Transformaciones Conformes”, M. Eugenia Torres, Universidad de Entre Ríos, Facultad de Ingeniería.

[4] http://es.scribd.com/doc/55496804/APLICACION-DE-LAS-APLICACIONES-CONFORMES-A-LA-FLUJO-DE-FLUIDOS , “Aplicación de las transformaciones conformes a fluidos”, Universidad de Trujillo.