La transformada de Laplace en la física nuclear

Federico R. Jasson

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
federicojasson@gmail.com

Agosto 2011

Resumen: Se estudiará la aplicación de la transformada de Laplace en el ámbito de la física nuclear, más específicamente, en su utilización para cálculos referidos al fenómeno de la radiación. Se presenta una breve introducción al tema, sin abundar en demasiados detalles, ya que lo que se intenta remarcar son las facilidades que brinda la herramienta matemática mencionada.

Palabras clave: transformada, Laplace, aplicación, radiación, desintegración.

I. Introducción

Para la descripción precisa de muchos fenómenos físicos dinámicos se requieren ecuaciones diferenciales. La desintegración nuclear, como se verá, forma parte de dichos fenómenos. Si bien ciertas ecuaciones diferenciales particulares pueden resolverse en forma directa, la resolución de muchas otras no es tan sencilla, y requiere la aplicación de métodos más elaborados. Uno de estos es la transformada de Laplace, que puede utilizarse con dicho fin.

II. La transformada de Laplace como herramienta matemática

La transformada de Laplace provee un método práctico para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n}[f(t)] + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[f(t)] + \cdots + a_1 \frac{d}{dt}[f(t)] + a_0 f(t) = h(t) \tag{1}$$

Resolver la ecuación implica hallar la función *f(t)* que satisfaga esta relación. Hacer esto en forma directa puede resultar muy complejo.

Sin embargo, las propiedades de la transformada de Laplace para la derivación permiten reducir el problema a uno algebraico. Notar que:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{2}$$

por lo que deben conocerse los valores iniciales de la función y sus derivadas.

El proceso posee tres etapas, esquematizadas en la figura 1:

- Aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación.
- Despejar $L\{ f(t) \}$.
- Antitransformar $L\{ f(t) \}$ para hallar $f(t)$.

Probablemente el último paso sea el más complicado, pues en general, al despejar $L\{ f(t) \}$ se obtiene un cociente de polinomios:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{3}$$

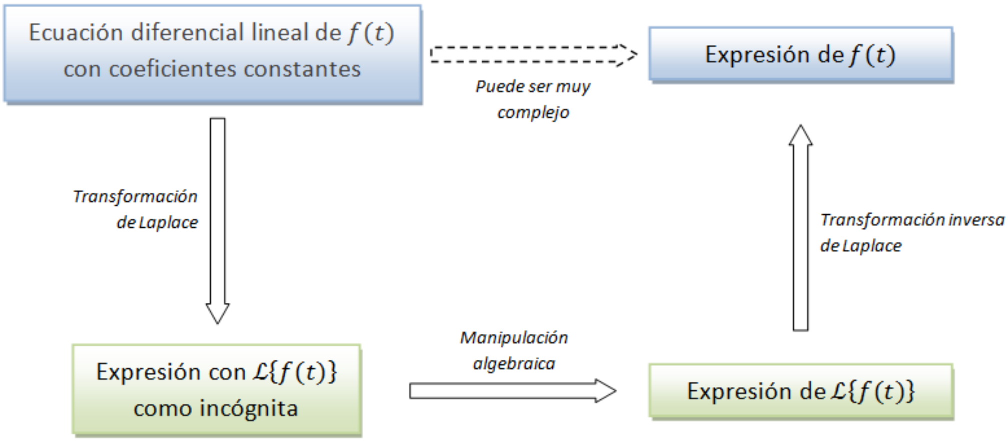

Figura 1: esquema de resolución de ecuaciones diferenciales a partir de la transformada de Laplace

Antitransformar esta expresión suele requerir primero descomponerla en fracciones parciales. Por supuesto, la complejidad de este proceso no se compara con la de resolver la ecuación diferencial en forma directa, por lo que el método sigue siendo útil de todas formas.

III. El fenómeno de la desintegración radioactiva

A. *Introducción*

Todos los núcleos atómicos contienen dos tipos de partículas fundamentales, los protones y los neutrones. Algunos de dichos núcleos son inestables y espontáneamente emiten partículas y radiación electromagnética. Este fenómeno se conoce como radioactividad.

B. *Origen del fenómeno*

Para comprender por qué ocurren los fenómenos radioactivos, es necesario analizar las fuerzas que actúan en el interior de los núcleos.

De acuerdo con la ley de Coulomb, las cargas eléctricas iguales se repelen y las cargas opuestas se atraen. En consecuencia, existe una fuerza de repulsión entre los protones que tiende a romper el núcleo. Esta fuerza es considerable, teniendo en cuenta la pequeñísima distancia entre dichas partículas.

Sin embargo, además de la repulsión, también hay atracciones de corto alcance entre las partículas (protones y neutrones), que se deben a las fuerzas nucleares actuantes.

La estabilidad de cualquier núcleo atómico depende de la diferencia entre las fuerzas de repulsión y las fuerzas de atracción. Cuando la repulsión es mayor que la atracción, el núcleo se desintegra y emite partículas y radiación. Si la fuerza de atracción predomina, el núcleo es estable.

El factor principal que determina la estabilidad del núcleo es la relación neutrón-protón. La figura 2 representa el número de neutrones frente al número de protones. Los núcleos más estables se localizan en una zona llamada cinturón de estabilidad. Claramente, la mayoría de los núcleos radioactivos se encuentran fuera de dicha área.

C. *Desintegración radioactiva*

La desintegración de un núcleo radioactivo suele ser el comienzo de un proceso de decaimiento. Éste consiste en una secuencia de reacciones nucleares que culmina en la formación de un isótopo estable.

Resulta imposible predecir con exactitud cuándo un núcleo aislado se desintegrará. Es igualmente probable que ocurra en cualquier momento, desde un instante hasta millones de años.

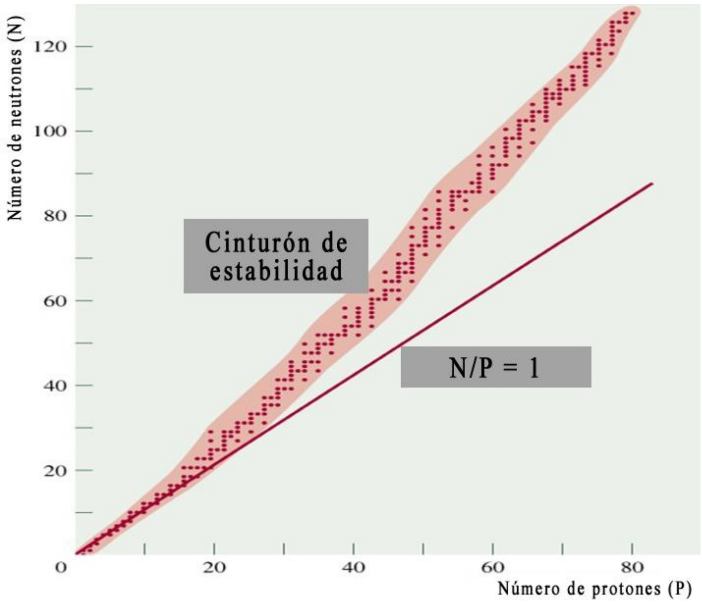

Figura 2: número de neutrones vs. número de protones

La predicción depende de la cantidad de núcleos inestables presentes en una muestra dada, es decir del estudio estadístico de un conjunto de núcleos. En consecuencia, la velocidad a la cual se desintegra un conjunto de núcleos radioactivos es proporcional a la cantidad de éstos presente en una cierta muestra:

$$-\frac{dN(t)}{dt} \propto N(t) \tag{4}$$

donde *N(t)* es la cantidad de núcleos radioactivos en un momento dado y el término de la izquierda corresponde a la velocidad con la cual decaen.

La velocidad de desintegración no cambia al variar la temperatura, la presión, o el entorno químico del núcleo, ya que la radioactividad no se ve afectada por los mismos factores que influyen en las reacciones químicas. Por ende, estos parámetros no aparecen en la ecuación.

Finalmente, se tiene que:

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) \tag{5}$$

donde λ es una constante de desintegración propia del núcleo radioactivo en cuestión.

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta utilizando la transformada de Laplace.

Demostración.

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{-\frac{dN(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{\lambda\, N(t)\} \Rightarrow -[s\mathcal{L}\{N(t)\} - N_0] = \lambda\, \mathcal{L}\{N(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{N(t)\}(s+\lambda) = N_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{N(t)\} = \frac{N_0}{s+\lambda} \Rightarrow N(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N_0}{s+\lambda}\right\}$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0\, e^{-\lambda t} \qquad \square \tag{6}$$

donde N_0 (= *N(0))* es la cantidad de núcleos inestables en el instante inicial. La ecuación (6) permite conocer la cantidad de núcleos radioactivos en cualquier momento. Nótese que dicha cantidad decrece exponencialmente.

D. *Aplicación*

Conocer la cantidad de núcleos inestables de una cierta muestra y la velocidad a la cual decrecen resulta de fundamental importancia cuando se trata de controlar, tratar y disponer de desechos radioactivos de variado tipo y origen. Distintos isótopos poseen períodos de desintegración muy variables.

IV. CONCLUSIONES

La transformada de Laplace es una herramienta muy poderosa. Las ecuaciones diferenciales son utilizadas en muchas ramas de la ciencia y la ingeniería, por lo que si un fenómeno puede ser descripto matemáticamente por una de ellas, la principal dificultad radica en plantearla correctamente. Una vez obtenida la ecuación, la resolución es sistemática.

El principal beneficio de la transformada de Laplace es que provee un método de resolución relativamente sencillo para toda una clase de problemas, es decir, no se limita a casos particulares sino que es general. Esto motiva más su aprendizaje, pues qué sentido tiene conocer un método que resulte útil únicamente en ciertos problemas.

REFERENCIAS

[1] R. Chang, "Química", McGraw-Hill, 7ma edición, 2002.
[2] D. Ebbing, y S. Gammon, "General Chemistry", Cengage Learning, 9na edición, 2007.
[3] J B. Povh, "Particles and nuclei: an introduction to the physical concepts", Springer, 4ta edición, 2004.
[4] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja", 1er cuatrimestre 2011.