Diseño de filtros analógicos

Ignacio Cousseau

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
ignaciocousseau@hotmail.com

Agosto 2015

Resumen: En este trabajo se analiza la representación y diseño de un sistema que opera con señales de entrada y produce señales de salida con propiedades específicas. Los filtros se utilizan especialmente para remover una componente o característica no deseada de una señal, generalmente para suprimir interferencias o reducir el ruido. También son utilizados en procesamiento de imágenes. Su estudio implica la aplicación de la Transformada de Laplace. En particular, se analiza el comportamiento de un filtro que permite el paso de señales de frecuencias menores a una frecuencia determinada y atenúa las demás (filtro ideal pasa bajas).

Palabras clave: filtro analógico, Transformada de Laplace, función de transferencia, filtro pasa bajas.

I. INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo se presentan las ideas matemáticas que son utilizadas en el diseño de un filtro. Un filtro es un dispositivo capaz de procesar una señal de entrada de manera que la señal de salida dependa, de forma predeterminada, de la frecuencia de dicha señal de entrada. Los filtros analógicos operan con señales que son continuas en el tiempo, tanto las de entrada como las de salida (a diferencia de los filtros digitales, que operan con señales discretas). Se desarrollarán a continuación los conceptos de partida que luego se aplican en el trabajo.

A. *Transformada de Laplace*

La transformada de Laplace de una función f(t) está definida por la expresión

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

La principal utilidad de la transformada de Laplace es que transforma ecuaciones diferenciales en el dominio t (tiempo) en ecuaciones algebraicas en el dominio s (frecuencia), por lo que resulta ser una herramienta muy útil. La transformada de Laplace encuentra una aplicación especial en el campo de las señales y el análisis de los sistemas lineales. Cuando un sistema es sujeto a una excitación (entrada), produce una respuesta (salida) (figura 1). Cuando la entrada u(t) y la salida x(t) son funciones de una sola variable t, que representa el tiempo, es normal referirse a ellas como señales.

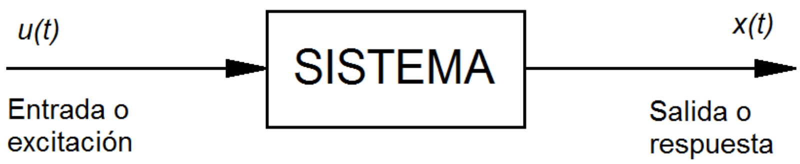

Figura 1. Representación esquemática de un sistema

B. *Función de Transferencia*

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la razón de la transformada de Laplace de la salida del sistema (o función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada del sistema (o función de fuerza). Una función transferencia G(s) siempre puede expresarse como:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{2}$$

Donde Q(s) = 0 es llamada ecuación característica del sistema, su orden determina el orden del sistema y sus raíces se conocen como los polos de la función transferencia.

Por último, resulta importante caracterizar la estabilidad de un sistema. Un sistema estable es uno cuya respuesta, en ausencia de una entrada, se aproximará a cero conforme el tiempo tiende a infinito. La estabilidad es una propiedad que depende del propio sistema, y no de la función de fuerza.

II. DISEÑO DE UN FILTRO IDEAL PASA BAJAS

Los filtros analógicos se clasifican de acuerdo a su capacidad de pasar o rechazar señales de diferentes frecuencias. Un filtro ideal pasa bajas pasa perfectamente las señales o componentes de señales de frecuencias menores que la frecuencia de corte ω_c. Arriba de ω_c, la atenuación es perfecta, lo que significa que aquellas señales cuya frecuencia está por arriba de esa frecuencia de corte no pasan por el filtro.

El problema se encuentra en determinar un sistema cuya respuesta en amplitud se aproxima a la respuesta ideal de un filtro pasa bajas. Se considera una de las soluciones posibles a este problema: los filtros de Butterworth.

La respuesta ideal del filtro pasa bajas está dada por

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \tag{3}$$

La aproximación de Butterworth a esta respuesta ideal es

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega c}\right)^{2n}}} \tag{4}$$

Nótese para esta última expresión que cuando n tiene a infinito, $|H(j\omega)|$ tiende a 1 si $|\omega| < \omega_c$ y a 0 si $|\omega| > \omega_c$, por lo que para valores grandes de n se trata de una buena aproximación a la respuesta deseada (ver la figura 2). Luego, (4) también puede expresarse como:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega c}\right)^{2n}} \tag{5}$$

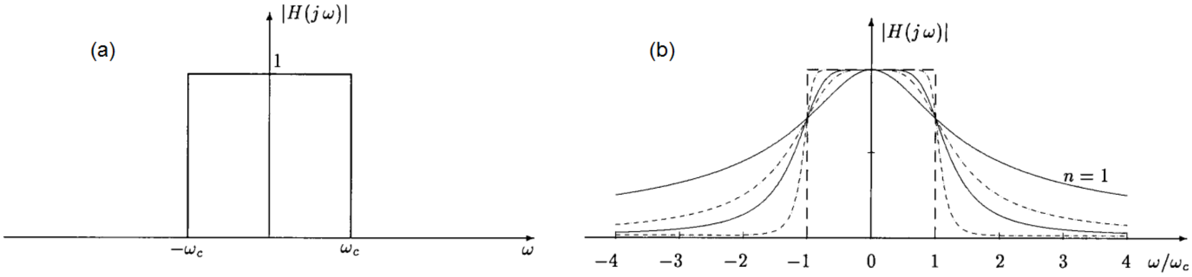

Figura 2. (a) Respuesta en frecuencia de un filtro ideal pasa bajas. (b) Respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth, con n variable.

Se asume que el sistema resultante es estable. Además debe cumplirse

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)\overline{H(j\omega)} \tag{6}$$

Si H(jω) tiene coeficientes reales (y así es realizable), entonces

$$\overline{H(j\omega)} = H(-j\omega) \tag{7}$$

Haciendo además un reemplazo s = jω, la expresión inicial dada en (5) queda:

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}} \tag{8}$$

Luego, se busca separar H(s) de H(-s) de tal manera que H(s) represente la función de transferencia de un sistema estable. Para ello, se hallan los polos de la función, que son aquellos s tales que

$$1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n} = 0 \tag{9}$$

Dando como resultado

$$s = \omega_c e^{j\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right]} \tag{10}$$

Según observa en la figura 3, en cada caso existen 2*n* polos igualmente distanciados alrededor del círculo de radio ω_c. También resulta notable que no hay polos en el eje imaginario. De acuerdo con la simetría observada, si s = s_p es un polo de H(s)H(-s), también lo es s = -s_p. Entonces, podemos seleccionar como polos correspondientes a la función de transferencia H(s) a aquellos que se encuentran en el semiplano izquierdo. Los polos restantes son de H(-s). Luego, a partir de (8), cuando n = 1:

$$H(s)H(-s) = \frac{{\omega_c}^2}{(\omega_c+s)(\omega_c-s)} \tag{11}$$

Eligiendo al polo s = -ω_c como el único polo de nuestro sistema:

$$H(s) = \frac{\omega_c}{\omega_c+s} \tag{12}$$

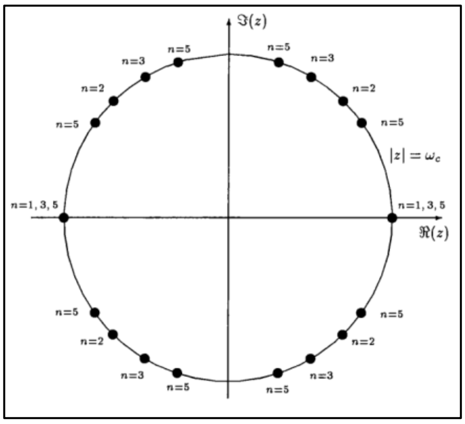

Figura 3: Ubicación de los polos para *n* = 1, *n* = 2, *n* = 3 y *n* = 5.

Procediendo análogamente para $n = 2$:

$$H(s)H(-s) = \frac{\omega_c{}^4}{\omega_c{}^4 + s^4} \tag{13}$$

$$H(s) = \frac{\omega_c{}^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c{}^2} \tag{14}$$

Se observa que el número n resultará ser el orden del denominador, que determinará el orden del sistema. Por lo tanto, n se conoce como el orden del filtro de Butterworth. Una vez obtenida la función transferencia de algunos filtros y alcanzada la idea matemática, se procede a su aplicación. Esto involucra la especificación de un circuito que implemente el filtro diseñado.

A partir de (12), como H(s) es la función de transferencia, Y(s) = H(s)U(s), entonces:

$$(s + \omega_c)Y(s) = \omega_c U(s) \tag{15}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace (se supone una condición inicial nula):

$$\frac{dy}{dt}(t) + \omega_c y(t) = \omega_c u(t) \tag{16}$$

Si fijamos $y(t) = v_c(t)$, $u(t) = e(t)$ y elegimos los valores de R y C tales que $1/RC = \omega_c$, obtendremos

$$\frac{dv_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}e(t) \tag{17}$$

Esto significa que el filtro de Butterworth de primer orden es realizable con un circuito RC.

III. CONCLUSIÓN

La transformada de Laplace resulta ser una herramienta muy útil en el modelado y diseño de filtros analógicos. Su aplicación permite simplificar la solución a los problemas que se plantean. Sin embargo, no puede decirse que resulte el método más adecuado para el análisis de todo tipo de sistemas, sino sólo para aquellos donde las señales de entrada y salida son funciones de una variable continua de tiempo (denominados sistemas de tiempo continuo).

Además, la correlación inmediata entre las ideas matemáticas analizadas y la construcción del sistema mediante componentes de circuitos demuestra la gran capacidad de aplicación práctica en ingeniería.

IV. REFERENCIAS

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.

[2] M. J. Chapman, Signal Processing in Electronic Communication, Horwood Publishing, 1997.

[3] G. Calandrini, Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja, 2015.

[4] B. Osgood, "Lecture Notes for EE 261, The Fourier Transform and its Applications", Standford University, disponible en http://see.stanford.edu/materials/lsoftaee261/book-fall-07.pdf, [acceso el 27 de Julio de 2015].

[5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible http://en.wikipedia.org/wiki/Filter_(signal_processing), [acceso el 27 de Julio de 2015].

[6] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible http://en.wikipedia.org/wiki/Low-pass_filter, [acceso el 27 de Julio de 2015].].