

Aplicación de la Transformada de Laplace en sistemas de control

Hipedinger, Marcos Alejandro

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
marcoshipe@gmail.com
Marzo 2014

Resumen: El siguiente informe muestra una de las muchas aplicaciones que tiene la Transformada de Laplace en ingeniería. En este caso para el análisis de sistemas de control. Además, se introduce al lector en ciertas características que pueden observarse al analizar un sistema y se da un ejemplo práctico en el cual se observa el modelado y el análisis posterior.

Palabras clave: Transformada de Laplace, sistemas de control, función de transferencia.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de ver el desarrollo matemático que se utiliza para analizar los sistemas de control es necesario entender en qué consisten estos sistemas, su utilidad y ciertas características que poseen.

Un sistema de control puede definirse como un conjunto de componentes que pueden regular su propia conducta o la de otro sistema con el fin de lograr un funcionamiento predeterminado.

En la Figura 1 puede verse un diagrama de un sistema de control genérico, donde:

La entrada de referencia es el valor deseado de la salida del sistema.

El controlador manipula las entradas al proceso controlado (señales de control) para obtener la salida deseada del sistema.

El proceso controlado (o planta) es el objeto físico a controlar

Y la salida es la variable del sistema que se desea controlar.

Un ejemplo de un sistema de control puede ser el alumbrado público, en donde la entrada de referencia es el grado de luminosidad deseado, el controlador puede ser un reloj que a determinada hora mande una señal de control de prendido o de apagado, el proceso controlado es el artefacto lumínico y la salida es el grado de luminosidad.

Los sistemas de control pueden dividirse en dos grandes grupos: de lazo abierto y de lazo cerrado.

Los primeros son en los cuales la salida no se mide ni se realimenta para compararla con la entrada. En el ejemplo del alumbrado público no se tiene en cuenta si la luminosidad actual es distinta a la deseada, sino que se controla por medio de un reloj, con lo cual es de lazo abierto.

Estos sistemas dependen enteramente de la exactitud del controlador para calcular las señales de control para las entradas dadas.

Los sistemas de lazo cerrado, en contrapartida, son aquellos en que la salida se compara con la entrada y esta diferencia se envía al controlador para corregir la salida.

Utilizando el ejemplo del alumbrado público, puede convertirse en lazo cerrado cambiando el reloj por una célula fotoeléctrica que mida la luminosidad del ambiente.



Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema de control

II. DISEÑO Y ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL

A. Diseño

Al diseñar un sistema de control se necesita recurrir a un modelo matemático de forma de encontrar una función para los controladores que dadas las entradas de referencia, produzcan señales de control tales que las salidas del sistema cumplan lo especificado.

B. Análisis

Teniendo el modelo matemático del sistema, es posible estudiar cómo actúa el sistema real y sacar conclusiones sin la necesidad del sistema real (ya sea porque todavía no está construido, es caro probarlo o lleva mucho tiempo)

Algunas características a analizar teniendo el modelo matemático son:

Estabilidad: Se dice que un sistema de control es estable cuando responde de forma limitada a cambios limitados en la variable controlada (Ver figura 2)

Exactitud: Un sistema es exacto cuando es capaz de mantener el error en un valor aceptable. (Ver figura 3)

Velocidad de Respuesta: es la rapidez con que la variable controlada se aproxima a la señal de referencia (Ver figura 4)

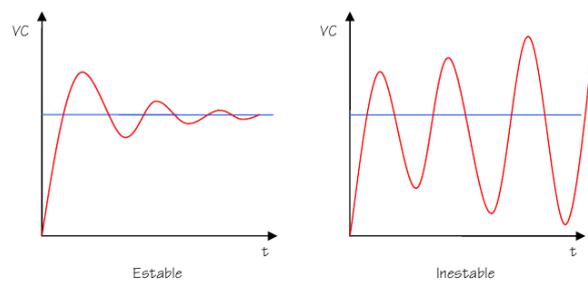


Figura 2: Estabilidad en los sistemas de control

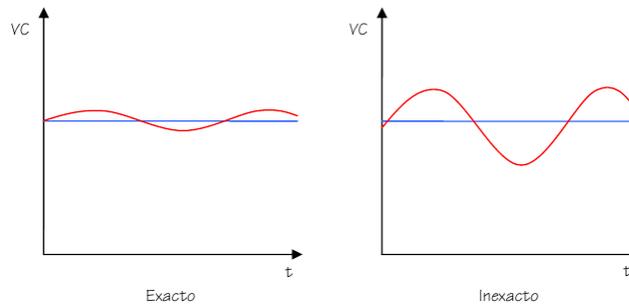


Figura 3: Exactitud en los sistemas de control

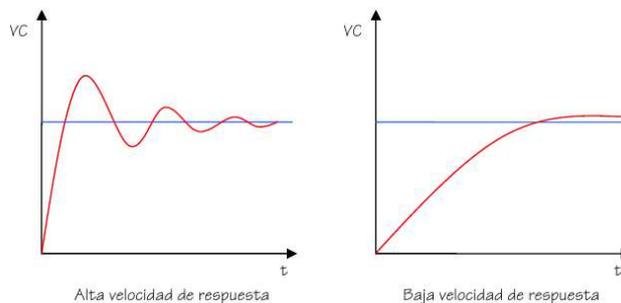


Figura 4: Velocidad de respuesta en los sistemas de control

C. Utilización de la transformada de Laplace en sistemas de control

Debido a que muchos sistemas de control son modelados con ecuaciones diferenciales, la transformada de Laplace nos brinda herramientas para analizar el sistema.

Para poder aplicar Laplace se debe cumplir con:

Ecuaciones diferenciales y lineales con coeficientes constantes (o sea que el sistema sea invariante en el tiempo)

Sistema lineal (que se pueda aplicar el principio de superposición)

Sistema monovisible (una sola variable de entrada y una sola variable de salida)

Para sistemas que no son monovisibles puede utilizarse el Espacio de Estado para poder analizar el sistema.

III. EJEMPLO DE UN SISTEMA DE CONTROL

Consideremos el sistema de cruce de un auto, el cual busca mantener una velocidad constante.

Para esto, dada una velocidad deseada, necesitamos calcular la fuerza que debe generar el motor (u).

Como simplificación vamos a tomar en cuenta solo los efectos de la fuerza ejercida por el motor y la fuerza ejercida por la fricción con el aire y las ruedas ($b \cdot v$, donde v es la velocidad del auto y b la constante de fricción).

En la figura 5 podemos ver el diagrama de bloque del sistema de cruce.

En la figura 6 podemos ver el diagrama de fuerzas del sistema.

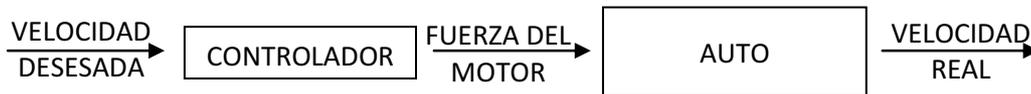


Figura 5: diagrama de bloque del sistema de cruce de un auto

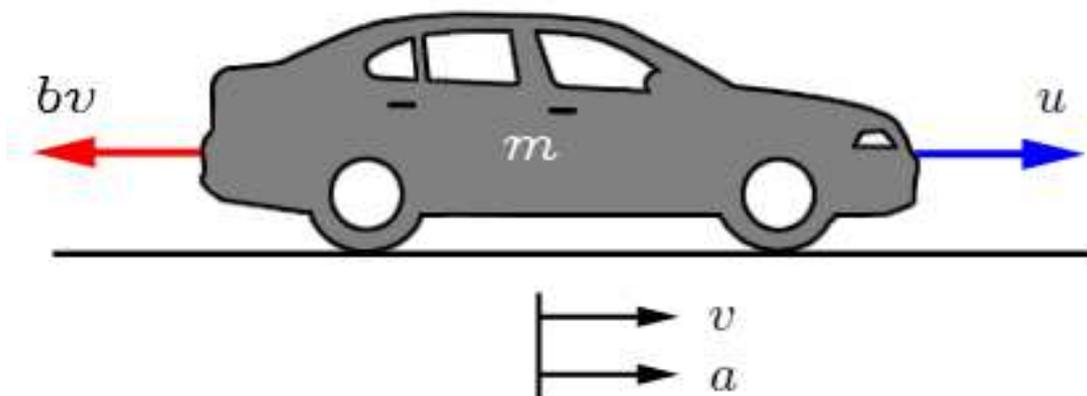


Figura 6: diagrama de bloque del sistema de cruce de un auto

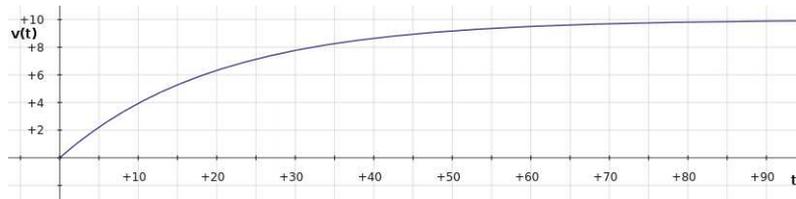


Figura 7: velocidad en función del tiempo para una dada velocidad de referencia

Haciendo un análisis de fuerza, tenemos que:

$$m * a = u - b * v$$

$$u = m * \frac{dv}{dt} + b * v$$

$$U(s) = m * s * V(s) + b * V(s)$$

$$V(s) = \frac{U(s)}{m * s + b}$$

Para poder analizar el sistema, vamos a ponerle valores a las constantes:

$$m=1000 \text{ [kg]} \text{ y } b = 50 \text{ [N}\cdot\text{sec/m]}$$

Y valor a u (el cual conseguimos para una v deseada): $u=500 \text{ [N]}$, con lo cual $U(s)=500/s$

$$V(s) = \frac{500}{s * (1000 * s + 50)}$$

$$V(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s + 0.05}$$

$$v(t) = 10 - 10 * e^{-0.05t}$$

En la Figura 7 observamos la velocidad en función del tiempo

El modelo anterior es de lazo abierto, y al ser muy simplificado la velocidad real puede diferir mucho de la deseada.

Una alternativa para disminuir el error es utilizar un modelo de lazo cerrado, el cual podemos diagramarlo de la siguiente forma:

El controlador en este caso tiene en cuenta la diferencia entre la velocidad real y la deseada que obtuvo anteriormente para recalcular la fuerza del motor necesaria.

IV. CONCLUSIONES

Como se observo en el ejemplo, la Transformada de Laplace es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales, y los sistemas de control, en general, están regidos por este tipo de ecuaciones.

Con lo cual ésta herramienta es útil en infinidad de ámbitos como pueden ser el militar (para el direccionamiento de misiles), el automotriz (para el control de crucero), el hogareño (para sistemas como el lavarropas), el industrial (para controlar el nivel de los tanques o para distintos procesos químicos).

REFERENCIAS

- [1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en <http://en.wikipedia.org/wiki>, [acceso el 24 de julio de 2010].
- [2] "INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL Y MODELO MATEMÁTICO PARASISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO.", [en línea] disponible en <http://dea.unsj.edu.ar/control1b/teoria/unidad1y2.pdf>, [consultada el 04 de marzo de 2014].
- [3] Jean F. Dulhoste "Teoría de control.", [en línea] disponible en http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean/index_archivos/Documentos/Teoria_Control.pdf, [consultada el 04 de marzo de 2014].
- [4] "Control Tutorials for Matlab y Simulink" <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=CruiseControl§ion=SystemModeling>, [consultada el 04 de marzo de 2014]