Aplicación de la Transformada de Fourier: Teoría de la señal

Estefanía E. Güimil

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
estefaniaguimil@yahoo.com.ar
Diciembre 2012

Resumen: El análisis de Fourier se utiliza en muchas áreas de ingeniería donde se analizan y diseñan sistemas dinámicos. A continuación se desarrollara uno de los resultados más importantes en Teoría de la Señal, el Teorema del Muestreo de Shannon.

Palabras clave: transformada de Fourier, teoría de la señal.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier, denominada así por Joseph Fourier, es una aplicación que hace corresponder a una función f, con valores complejos y definida en la recta, con otra función g definida de la manera siguiente:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

Donde f es L^1, es decir, f tiene que ser una función integrable en el sentido de la integral de Lebesgue. El factor, que acompaña la integral en definición facilita el enunciado de algunos de los teoremas referentes a la transformada de Fourier. Aunque esta forma de normalizar la transformada de Fourier es la más comúnmente adoptada, no es universal. En la práctica las variables x y ξ suelen estar asociadas a dimensiones y entonces es correcto utilizar la fórmula alternativa:

$$g(\xi) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\beta\xi x}\, dx$$

De forma que la constante beta cancela la dimensiones asociadas a las variables obteniendo un exponente no dimensional.

La transformada de Fourier así definida goza de una serie de propiedades de continuidad que garantizan que puede extenderse a espacios de funciones mayores e incluso a espacios de funciones generalizadas.

En procesamiento de señales la transformada de Fourier suele considerarse como la descomposición de una señal en componentes de frecuencias diferentes, es decir, g corresponde al espectro de frecuencias de la señal f.

La rama de la matemática que estudia la transformada de Fourier y sus generalizaciones es denominada análisis armónico.

Son varias las notaciones que se utilizan para la transformada de Fourier de f. He aquí algunas de ellas:

$\mathcal{F}[f]$, $\hat{f}$, $F(f)$, $\mathcal{F}\{f\}$.

II. TEORÍA DE LA SEÑAL

Supongamos que f (t) representa la amplitud de una señal (una onda de sonido o una onda electromagnética, por ejemplo) en el instante de tiempo t. La fórmula

$$f(t) = \int \hat{f}(w)\, e^{iwt} dt\,, \qquad \hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi}\int f(t) e^{-iwt}\, dt$$

Describe a f como una superposición de las ondas periódicas simples e^{iwt}, donde ω cubre el rango de todas las posibles frecuencias. Esta representación es básica en el análisis de señales en ingeniería eléctrica.

En primer lugar, la potencia de la señal f (t) es proporcional al cuadrado de su amplitud $|f(t)|^2$, y por tanto, la energía total de una señal es proporcional a $\int |f(t)|^2\ dt$. De esta forma, la condición de ser finita la energía total de la señal f significa simplemente que f $\epsilon\ L^2$. Vemos, por tanto, que L^2 es un espacio que no sólo tiene muy buenas propiedades desde un punto de vista matemático (es un Hilbert, y eso es mucho) sino que también tiene una realidad física clara: es, en particular, el espacio de las señales que tienen energía finita.

En segundo lugar, los sistemas eléctricos pueden ser modelizados matemáticamente como operadores A que transforman una señal de entrada f en una señal de salida Af. Muchos de estos sistemas son (al menos en una primera aproximación) lineales, lo cual significa que el operador A es lineal. Además, la acción de estos sistemas no se ve afectada por el paso del tiempo (para una misma entrada f, la señal de salida es la misma hoy que mañana). Esto significa que el operador A conmuta con las translaciones, es decir, si (Af) (x) = g (x), entonces (Af) (x + s) = g (x + s) para cualquier s ϵR. Se puede demostrar que entonces el operador A es del tipo

$$Af = (h\hat{f})^{\vee}, \text{ o lo que es equivalente, } Af = H * f \qquad (1)$$

Donde h: R → C y H es su transformada inversa de Fourier. La función h se denomina función del sistema y H se suele llamar la respuesta impulso. Si escribimos h (ω) en forma polar como h (ω) = $A(\omega)e^{i\theta(w)}$, entonces A (ω) y θ (ω) representan, respectivamente, la amplitud y la fase debido al operador A en la frecuencia ω. Los operadores del tipo (1) han sido y son ampliamente estudiados en matemáticas puras, especialmente a partir de los trabajos de A. Zygmund y A. Calderón quienes crearon a principios del siglo XX en la universidad de Chicago una muy fructífera escuela de matemáticos que se ocupó, entre otras cosas, del estudio de este tipo de operadores.

Pero volvamos a las señales. Supongamos que estamos interesados en conocer una señal f a partir del conocimiento de los valores de la amplitud de dicha señal en una sucesión de tiempos t1 < t2 < ⋯ .Esto es posible para una función arbitraria f (t), el conocer f (t1), f (t2), ⋯ nos dice absolutamente nada sobre f (t) para un t ≠ t1, t2, ⋯. Sin embargo, si la señal f involucra frecuencias ω limitadas es un cierto rango, es decir, si ω ∈ [−L, L], para un cierto L > 0, entonces sí que vamos a poder describir apropiadamente la señal f. Para ello necesitaremos hacer uso de técnicas que involucran a las series de Fourier y a la transformada de Fourier. Antes de seguir adelante, diremos que una señal f es limitada en banda si $\hat{f}(\omega) = 0$ para ω ∉ [−L, L]. Si f ∈ L^2 y es limitada en banda, entonces $\hat{f} \in L^2$ (teorema de Plancharel) y además $\hat{f}(\omega) = 0$ para ω ∉ [−L, L]. Por tanto, $\hat{f} \in L^1$ y vale el Teorema de Inversión de Fourier.

Recordemos también que dada una función 2L−periódica f, su serie de Fourier asociada se escribe en la forma

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\ \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n\ \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2)$$

Usando las identidades trigonométricas

$$\cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}, \qquad \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}$$

La expresión (2) se transforma en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i^{n\pi x}/_L} \qquad (3)$$

Donde

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \qquad c_n = \frac{A_n - i\, B_n}{2} \; y \; c_{-n} = \frac{A_n + i\, B_n}{2}.$$

Con todo esto en mente ya estamos en condiciones de enunciar y probar uno de los resultados más importantes en Teoría de la Señal, el Teorema del Muestreo de Shannon.

Teorema (del muestreo de Shannon) Supongamos que f es continua a trozos, f ∈ L2 (R) ∩ L1 (R) y que b f (ω) = 0 para ω Ɛ [−L, L]. Entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{n\pi}{L}) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi}.$$

Es decir, f está completamente determinada por los valores de f en los puntos $\frac{n\pi}{L}$.

La demostración es muy formativa pues hace intervenir algunos de los resultados más importantes del Análisis de Fourier. La esbozamos a continuación.

Como $\hat{f} \in L^2$, podemos calcular la serie de Fourier asociada a $\hat{f}$, a la cual en su forma compleja viene dada por

$$\hat{f}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}\, e^{-i^{n\pi w}/_L} \; (|w| \leq L) \qquad (4)$$

Donde los coeficientes de Fourier c_{-n} están dados por

$$c_{-n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \hat{f}(w) e^{i^{n\pi w}/_L}\, dw = \frac{1}{2L} f\left(\frac{n\pi}{L}\right). \qquad (5)$$

Nótese que la identidad (4) es consecuencia del teorema de convergencia puntual para series de Fourier (ya que $\hat{f}$ es diferenciable a trozos al ser f continua a trozos, y $\hat{f}$ es continua por el Lema de Riemann-Lebesgue) y que (5) es consecuencia del Teorema de Inversión de Fourier (ya que f y $\hat{f}$ están en $L^1(R)$). Usando de nuevo este mismo argumento se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-L}^{L} \hat{f}(w) e^{iwt}\, dw \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{n\pi}{L}) e^{-in\pi w/L} e^{iwt}\, dw \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{e^{i(Lt-n\pi)w/L}}{i(Lt-n\pi)/L} \Bigg|_{(L,-L)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{n\pi}{L}) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi}, \end{aligned}$$

Dónde la integración término a término es consecuencia del teorema de integración para series de Fourier.

Como hemos mencionado anteriormente, este teorema nos dice que es posible recuperar una señal limitada en banda f (t) a partir de los datos $f\left(\frac{n\pi}{L}\right)$, n ∈ N. Además, el teorema nos da una fórmula explícita para calcular f (t).

III. CONCLUSIONES

Aunque a simple vista no parezca, la transformada de Fourier tiene una multitud de aplicaciones en muchas áreas de la ciencia e ingeniería: la física, la teoría de los números, la combinatoria, el procesamiento de señales (electrónica), la teoría de la probabilidad, la estadística, la óptica, la propagación de ondas y otras áreas. Y aunque el análisis parezca complicado lo más importante es tener presente las propiedades que posee y aprovechar las mismas.

REFERENCIAS

[1] "La Transformada de Fourier", [en línea], disponible en http://ocw.bib.upct.es/pluginfile.php/7528/mod_resource/content/1/tema9.pdf [consultada en diciembre de 2012].

[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso en diciembre de 2012].