Aplicación de la Transformada de Laplace: Resolución de un circuito RLC

Guido Kestel

Estudiante de Ingeniería en Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
guido_kestel@yahoo.com.ar

Febrero 2014

Resumen: En este articulo, se busca mostrar una aplicación física de uno de los conceptos más importantes en el análisis de funciones de variable compleja: la Transformada de Laplace. Este concepto matemático será utilizado como herramienta para poder resolver la ecuación diferencial ordinaria de un sistema electromagnético, más específicamente un circuito RLC.

Palabras clave: Transformada de Laplace, ecuación diferencial ordinaria, circuito RLC.

I. INTRODUCCIÓN

En el estudio del electromagnetismo, muchas veces resulta conveniente analizar el comportamiento de un circuito electrónico el cual se compone de varios elementos físicos. La naturaleza de dichos componentes analizados en conjunto puede describirse con gran precisión con una ecuación diferencial ordinaria. Existen diversas herramientas para resolver estas ecuaciones y posteriormente obtener los datos deseados. Una de estas herramientas es la Transformada de Laplace. El objetivo del articulo es mostrar cómo se puede aplicar el concepto de Transformada de Laplace en un cálculo matemático y de esta forma obtener información importante sobre fenómenos electromagnéticos.

II. CONCEPTOS IMPORTANTES

A. *Ecuaciones Diferenciales*

Una ecuación diferencial es una ecuación en la cual intervienen una o más variables desconocidas. Las ecuaciones con una sola variable se denominan **Ecuaciones diferenciales ordinarias**, mientras que las que tienen más de una son **Ecuaciones diferenciales parciales**. La particularidad de este tipo de ecuaciones es que las variables se relacionan entre sí por medio de sus derivadas. Otra característica de las Ecuaciones diferenciales es su orden, que se define a partir de la variable con la derivada de mayor orden. En este artículo se verán ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos.

B. *Circuitos RLC*

Un circuito RLC es un cricuito eléctrico formado por una resistencia R (medida en Ohms [Ω]), un inductor L (medido en Henrys [H]) y un capacitor C (medido en Faradios [F]) conectados en serie o en paralelo junto con una fuente de voltaje (medida en Voltios [V]). Esta fuente puede emitir una tensión continua o alterna. El comportamiento de un circuito RLC se describe con una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que tiene la siguiente forma: $Ri(t) + L\frac{d}{dt}\, i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\, du = e(t)$

Donde ***Ri(t)*** *es la caída de potencial de la resistencia,* $\mathbf{L}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\ \mathbf{i(t)}$ *es la tensión en la inductancia ,* ***e(t)*** *es la tensión de la fuente y* $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}}\mathbf{i(u)\ du} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}}$ *es la caída de voltaje a través del capacitor.*

C. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un tipo de transformación integral donde se toma una función f(t) de una variable t (a la cual nos referiremos como tiempo) en una función F(s) de otra variable s (la frecuencia compleja). Se dice que F(s) es la transformada de Laplace de f(s), asi como f(s) es la antitransfornada de Laplace de F(s). Matemáticamente la transformada se define como: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \mathcal{L}[f(s)]$

Algunas de sus propiedades son:

- Linealidad: $\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta f(t)] = \alpha F(s)+\beta F(s)$
- Traslación: $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha)$
- Transformada de la integral: $\mathcal{L}[\int_0^t f(t)dt] = \frac{F(s)}{s}$
- Transformada de una derivada: $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$

III RESOLUCION DEL CIRCUITO

La estrategia para la resolución de un circuito RLC consiste, en una primera instancia, en obtener la ecuación diferencial de segundo orden correspondiente al circuito a analizar. Para ello es necesario conocer las características físicas de la resistencia, el capacitor y la inductancia (Ver figuras 1 y 2). También resulta importante tener información del instante inicial, es decir la corriente en el circuito y la tensión en el capacitor en un tiempo t=0. En el siguiente problema se considerará:

$i(0) = 0$ y $v_c(0)= 0$.

A partir de los datos del problema, surge la siguiente ecuación diferencial:

$$30 = 200 i(t) + i'(t) + 4096 \int_0^t i(u)du$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\frac{30}{s} = 200\, I(s) + s\, I(s) - i(0) + 4096 \frac{I(s)}{s}$$

Una vez obtenida una expresión en frecuencia compleja, se despeja I(s):

$$I(s)\left(\frac{200s + s^2 + 4096}{s}\right) = \frac{30}{s}$$

$$I(s) = \frac{30}{(s+100)^2 - 5904}$$

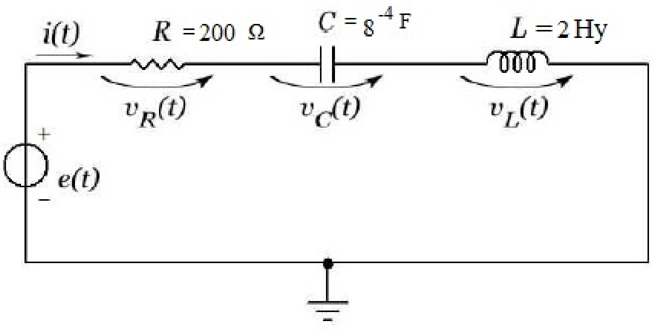

Figura 1: Circuito RLC del problema

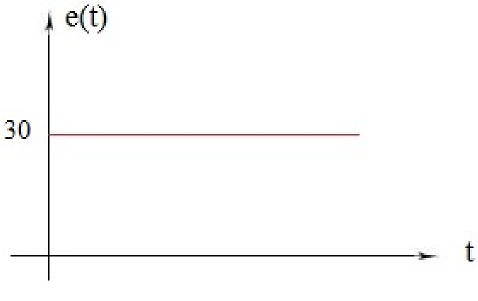

Figura 2: Tension vs tiempo

Nos interesa conocer la expresión de la corriente en función del tiempo i(t), por lo tanto se procede a antitransformar la expresión I(s) recientemente obtenida para poder obtener dicha expresión:

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i(t) = \frac{30e^{-100t}\operatorname{senh}[(12\sqrt{41})t]}{12\sqrt{41}}$$

De esta forma, se puede saber cómo varía la corriente del sistema en función del tiempo utilizando la transformada de Laplace. Nótese que la expresión se verifica para las condiciones iniciales planteadas al principio del problema.

IV CONCLUSION

A partir de este articulo, se puede concluir que la Transformada de Laplace resulta ser una herramienta útil para resolver problemas en el ámbito de la física, ya que utilizando un método simple y mecánico se puede obtener información útil sobre el comportamiento de un circuito sometido a ciertas condiciones iniciales.

REFERENCIAS

[1] Wikipedia, [internet] , disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit, [acceso el 21 de diciembre de 2013]

[2] Wikipedia, [internet] , disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_diferenciales, [acceso el 21 de diciembre de 2013]

[3] G. Calandrini, “Guia de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. 2do cuatrimestre 2013, pag 51.

[4] G. James, “Matematicas Avanzadas Para Ingenieria”, Pearson educación, segunda edición 2002, pag 98.