

Aplicación Transformada de Laplace en la Suspensión de Automóviles

Gonzalo Picorel

*Estudiante de Ingeniería en Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
gonzalopicorel@gmail.com
Agosto 2015*

Resumen: La transformada de Laplace es una herramienta que puede utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales generadas por modelos dinámicos reales, cuyo comportamiento varía respecto al tiempo. En este trabajo se analizará la aplicación de la transformada de Laplace en el modelo de la suspensión de un automóvil, donde su objetivo es absorber las irregularidades del terreno por el que circula el vehículo.

Palabras clave: Transformada de Laplace, control de proceso, suspensión, función de transferencia.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace es un tipo de transformada integral frecuentemente usada para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Debe su nombre al matemático francés Pierre-Simon Laplace, quien continuó la investigación realizada por Euler sobre integrales como soluciones de ecuaciones diferenciales.

Las aplicaciones prácticas de la transformada de Laplace surgen a partir del trabajo del ingeniero inglés Oliver Heaviside, quien descubrió que los operadores diferenciales podían tratarse analíticamente como variables algebraicas.

Para poder diseñar un sistema de control automático, se requiere realizar un modelo dinámico del proceso que se desea controlar. Esta representación abstracta de un cierto aspecto de la realidad da lugar a ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento.

La transformada de Laplace facilita la resolución de esas ecuaciones, permitiendo obtener una función dependiente del tiempo, o una función de transferencia. Es decir, un modelo matemático que, a través de un cociente, relaciona la respuesta de un sistema con una señal de entrada o excitación.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Donde $H(s)$ es la función de transferencia, a veces también notada como $G(s)$. $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta y $X(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

En el presente informe se desarrollará una aplicación real de la transformada de Laplace y función de transferencia: el modelo de suspensión de los automóviles.

II. EL MODELO DE SUSPENSIÓN DE LOS AUTOMÓVILES

A. Antecedentes

Desde el tiempo de los carruajes, una preocupación constante fue tratar de hacer más cómodos los vehículos. Los caminos empedrados eran una tortura para los ocupantes, pues cada piedra o irregularidad que las ruedas pasaran se registraba donde se sentaban con la misma magnitud.

Las primeras soluciones fueron acolchar los asientos o poner resortes en el pescante del cochero, para reducir esos impactos, pero el problema aún no se resolvía.

Fue así como en el siglo XIX nació el sistema de suspensión: un medio elástico que además de sostener la carrocería, asimila las irregularidades del camino.

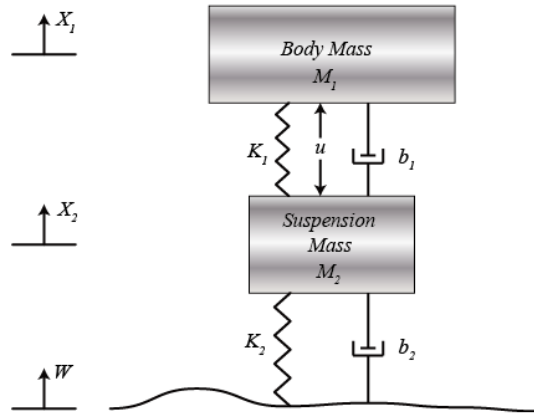


Figura 1: Diagrama de las suspensión de una de las ruedas del automóvil.

B. Modelado del Sistema de Suspensión

La suspensión en un automóvil es el conjunto de elementos que absorben las irregularidades del terreno por el que se circula para aumentar la comodidad y el control del vehículo. El sistema de suspensión actúa entre el chasis y las ruedas, las cuales reciben de forma directa las irregularidades de la superficie transitada.

En este caso se diseñará el modelo del sistema de suspensión de una de las cuatro ruedas para simplificar el problema a un sistema de muelle-amortiguador múltiple en 1 dimensión. Éste sistema se muestra en la Figura 1.

Es un modelo para un sistema de suspensión activo donde se incluye un accionador, capaz de generar la fuerza de control U para controlar el movimiento del cuerpo del automóvil. En el diagrama se incluyen las siguientes abreviaturas:

- M_1 es la masa correspondiente a 1/4 del automóvil.
- M_2 es de masa de suspensión.
- K_1 constante del muelle del sistema de suspensión.
- K_2 constante del resorte de la rueda y el neumático.
- b_1 constante de amortiguamiento del sistema de suspensión
- b_2 constante de amortiguamiento de la rueda y el neumático.
- U fuerza de control.

A partir de la ley de Newton y el diagrama mostrado, se pueden obtener las siguientes ecuaciones.

$$M_1 X_1'' = -b_1(X_1' - X_2') - K_1(X_1 - X_2) + U$$

$$M_2 X_2'' = b_1(X_1' - X_2') + K_1(X_1 - X_2) + b_2(W' - X_2') + K_2(W - X_2) - U$$

C. Análisis del Sistema

Aplicando la transformada de Laplace, y resolviendo algebraicamente, se obtienen las siguientes funciones de transferencia. Se asume que las condiciones iniciales son cero, con el fin de representar la situación en la que la rueda del vehículo sube un bache o irregularidad.

Cuando queremos considerar la entrada de control $U(s)$ solamente, se fija $W(s) = 0$. Así se obtiene la función de transferencia $G_1(s)$ como sigue:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)}$$

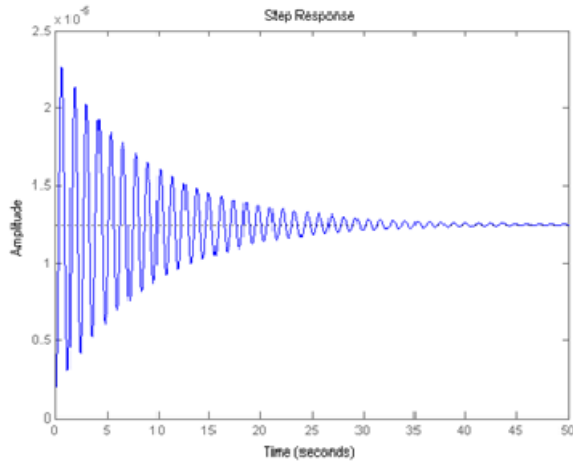


Gráfico 1. Respuesta de $G_1(s)$.

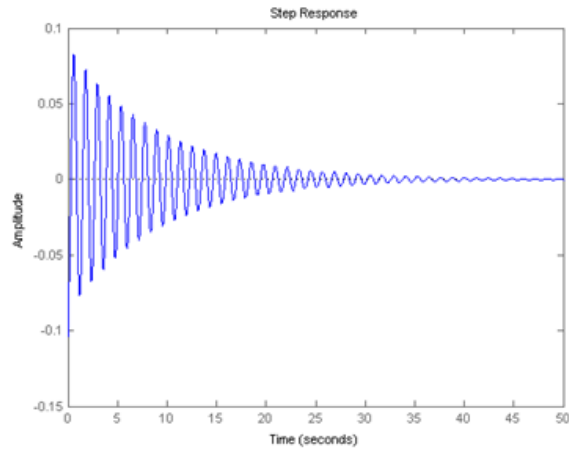


Gráfico 2. Respuesta de $G_2(s)$.

$$G_1(s) = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + b_2s + K_2}{(M_1s^2 + b_1s + K_1) * (M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + K_1 + K_2) - (b_1s + K_1) * (b_1s + K_1)}$$

Cuando queremos considerar solo la entrada de la perturbación $W(s)$, se fija $T(s) = 0$. Así se obtiene la función de transferencia $G_2(s)$, como se muestra a continuación:

$$G_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{-M_1 b_2 s^3 - M_1 K_2 s^2}{(M_1 s^2 + b_1 s + K_1) * (M_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + K_1 + K_2) - (b_1 s + K_1) * (b_1 s + K_1)}$$

Cuando el automóvil experimenta cualquier perturbación de la carretera (es decir, agujeros, grietas y pavimento irregular), el cuerpo del automóvil no debería tener grandes oscilaciones, y las oscilaciones deben disiparse rápidamente. Dado que la distancia X_1-W es muy difícil de medir, y la deformación del neumático (X_2-W) es insignificante, se utilizará la distancia X_1-X_2 en lugar de W como la salida en nuestro problema.

La perturbación en la carretera (W) en este problema será simulada por una entrada con la función escalón.

En el gráfico 1 se puede apreciar la respuesta de $G_1(s)$ para una entrada de escalón unitario. Podemos ver que el sistema no está bien amortiguado; Los pasajeros del automóvil sentirán pequeñas oscilaciones y el automóvil tarda un tiempo inaceptablemente largo para alcanzar el estado de equilibrio (el tiempo de establecimiento es muy grande).

En el gráfico 2 se puede ver la respuesta para una entrada escalón de una perturbación con magnitud 0,1 m. A partir de este gráfico se puede ver que cuando el automóvil pasa un bache de 10 cm de alto en el camino, la carrocería del mismo oscilará por un tiempo inaceptablemente largo (~ 50 segundos) con una amplitud inicial de 8 cm. Los pasajeros del automóvil no se sentirán cómodos con una oscilación de esa magnitud y por un tiempo tan prolongado.

La solución a estos problemas es añadir un controlador PID de retroalimentación en el sistema para mejorar el rendimiento.

D. Diseño del controlador PID

Se utilizará las ecuaciones de G_1 y G_2 y el diseño del sistema presentado en la figura 2. La función de transferencia del controlador es:

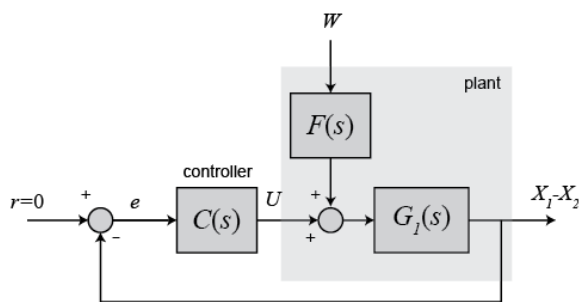


Figura 2. Diagrama del Sistema con un Controlador PID

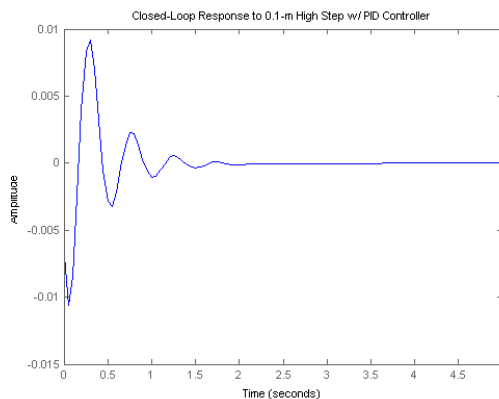


Gráfico 3. Respuesta del Sistema con el Controlador PID.

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Donde K_p es la constante de proporcionalidad, K_i es la constante de integración, y K_d es la constante de derivación. Para este ejemplo se usaron los valores de $K_p=208025$, $K_i=832100$ y $K_d=624075$. Cuando simulamos la respuesta del sistema (la distancia de X_1-X_2) a la misma perturbación del camino que se utilizó antes, se obtienen los resultados del gráfico 3.

En el mismo se puede ver como la amplitud de la oscilación es de solo 9mm y el tiempo de establecimiento es menor a 5 segundos. Con el controlador PID diseñado de esa manera se obtiene una buena amortiguación.

III. CONCLUSIONES

La transformada de Laplace puede ser utilizada para el análisis de sistemas dinámicos, tales como la suspensión de los vehículos, la velocidad crucero, el control del motor y el funcionamiento de ABS, Air Bags, y el control de climatización. Sin embargo, las aplicaciones de esta herramienta son mucho más amplias, donde se incluyen innumerables situaciones tanto industriales como domésticas.

En el presente informe se pudo apreciar un ejemplo concreto, la aplicación de la Transformada de Laplace en la suspensión de los vehículos.

REFERENCIAS

- [1] Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja, pp. 47-52. 2015.
- [2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en <http://es.wikipedia.org/wiki/>, [acceso mayo de 2015].
- [3] Slideshare, Aplicaciones reales de la transformada de Laplace, [internet], disponible en: http://www.slideshare.net/ptah_enki/laplace-349511; [acceso mayo de 2015]
- [4] Jongeun Choi, Modeling of mechanical systems, Michigan State University, [internet], disponible en: http://www.egr.msu.edu/classes/me451/jchoi/2012/notes/ME451_L5_ModelMechanical.pdf; [acceso mayo de 2015]
- [5] Suspension: System Modeling - Control Tutorials for Matlab, University of Michigan, [internet], disponible en <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Suspension§ion=SystemAnalysis>; [acceso mayo de 2015]