# Aplicación de la trasformada de Laplace en la deformación de vigas

Leandro G. Gilardi

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*Leogilardi22@hotmail.com*

Enero 2012

*Resumen:* En este informe se mostrará una de las aplicaciones de la transformada de Laplace, en este caso, se intentara mostrar como se utilizan este tipo de operaciones en el cálculo de la deformación de una viga.
*Palabras clave:* viga, carga, frontera.

## I. Introducción

Los métodos de la transformada de Laplace pueden ser utilizados para resolver problemas con valores en la frontera y, para mostrar esto, consideremos los métodos de dicha transformada para determinar la deformación transversal de una viga delgada uniforme debido a una carga. En este documento, se intentara mostrar como son aplicadas las transformadas de Laplace para obtener deformaciones de vigas al aplicarle una carga en diferentes posiciones.

## II. Trasformada de Laplace en deformaciones de viga

Consideremos una viga delgada de longitud L y sea y(x) su desplazamiento transversal, a una distancia x medida desde uno de los extremos, de la posición original debido a la carga. En la figura 1 esta ilustrada esta situación, con el desplazamiento medido hacia arriba. Entonces, de la teoría elemental de las vigas, tenemos

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -W(x) \tag{1}$$

Donde W(x) es la fuerza transversal por unidad de longitud, considerando la dirección positiva hacia abajo y EI es la rigidez de flexión de la viga (E es el modulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de a viga alrededor de su eje central). Se supone que la viga tiene propiedades uniformes de elasticidad y una sección transversal uniforme en toda si longitud, asi que tanto E como I se toman como constantes.
La ecuación 1) se escribe algunas veces como

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x) \tag{2}$$

Donde y(x) es su desplazamiento transversal medido hacia abajo y no hacia arriba como en (1).
En los casos cuando la carga es uniforme a lo largo de toda la longitud de la viga, esto es, W(x)= constante,

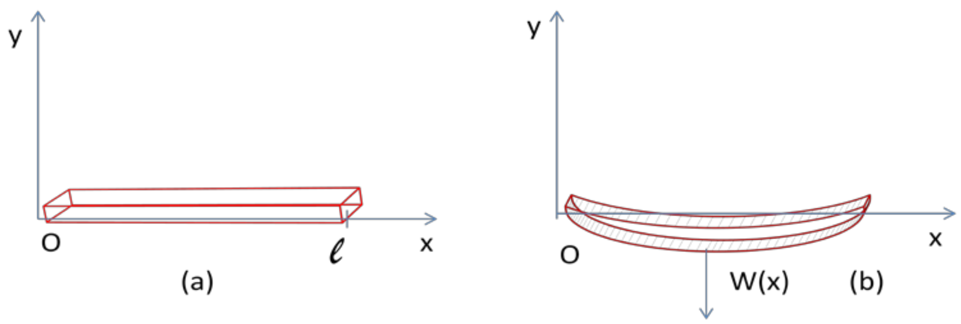


Figura 1 : Deflexión transversal de una viga: (a) posición inicial, (b) posición desplazada.

(1) se puede resolver fácilmente con las técnicas normales del cálculo integral. Sin embargo, cuando la carga no es uniforme, los métodos de la transformada de Laplace tienen una ventaja importante, ya que haciendo uso de las funciones unitarias Heaviside y de las funciones impulso, el problema de resolver (1) independientemente para varias secciones de la viga puede evitarse.
Aplicando la transformada de Laplace en todo (1) se tiene

$$EI[s^4Y(s) - s^3y(o) - s^2y_1(0) - sy_2(0) - y_3(0)] = -W(s) \quad (3)$$

Donde

$y_1$ (0)= $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $y_2$ (0)= $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ $y_3$ (0)= $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$

Y pueden interpretarse físicamente como sigue:

EI$y_3$ (0) Es la fuerza cortante en x=0

EI $y_2$ (0)Es el momento de torsión en x=0

$y_1$ (0) Es la pendiente en x=0

y (0) Es la deflexión en x=0

Resolviendo 3) para y(s) llegamos a

$$Y(s) = \frac{-W(s)}{EIs^4} + \frac{y(0)}{s} + \frac{y1(0)}{s^2} + \frac{y2(0)}{s^3} + \frac{y3(0)}{s^4} \quad (4)$$

Asi, se necesita encontrar cuatro condiciones de frontera e idealmente deben ser la fuerza cortante, el momento de torsión, la pendiente y la deflexión en x = 0. Sien embargo, estas condiciones de frontera no siempre están disponibles.

Estas condiciones de frontera usualmente están indicadas en condiciones físicas de la siguiente manera:

a. La viga esta libre, o simplemente, sostenida en ambos extremos, indicando que tanto el momento de torsión como la deflexión son cero en ambos extremos. Asi y = $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ = 0 en ambos x = 0 y x = $l$ (donde $l$ es la longitud de la viga).
b. En ambos extremos la viga esta sujeta o construida en una pared. De esta manera, la viga esta horizontal en ambos extremos, asi que y = $\frac{dy}{dx}$ = 0 en ambos x = 0 e x = $l$.
c. La viga esta volada con un extremo libre (esto es fija horizontalmente en u extremo, con el otro extremo libre). En el extremo fijo (supongamos x = 0)

y= $\frac{dy}{dx}$ = 0 en x = 0, y el extremo libre (x = $l$), como tanto la fuerza cortante y el momento de torsión son cero,

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ = $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ = 0 en x = $l$

Si la carga no es uniforme a lo largo de toda la viga, se hace uso de las funciones escalón Heaviside y de las funciones de impulso para especificar W(x) en (1).

Por ejemplo, un peso uniforme w por unidad de longitud sobre la porción de la viga x = $x_1$a x = x ,$x_2$ se especifica como wH (x- $x_1$) – wH (x- $x_2$), y un peso puntual w en x= $x_1$ se especifica como wδ (x- $x_1$).

## III. Aplicación de las transformaciones de Laplace para calculo de deformaciones de viga

A continuación trataremos de encontrar la deflexión de una viga sostenida simplemente en sus extremos x = 0 y x = l , con un momento de torsión bajo su propio peso M uniformemente distribuido y una carga W concentrada en x = $\frac{1}{2}$l.

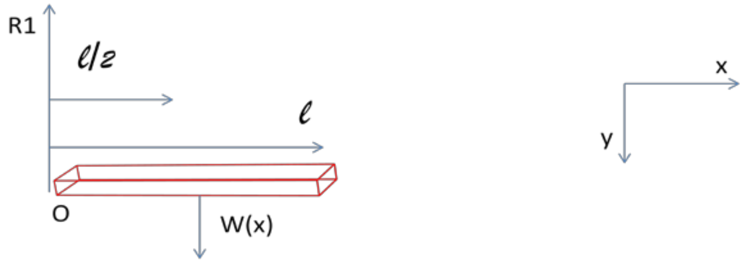


Figura 2

Cargando

$W(x) = \frac{M}{l}H(x) + W\delta\left(x - \frac{l}{2}\right) - R_1\delta(x)$

Donde $R_1 = \frac{1}{2}(M + W)$

Por lo que la función de la fuerza es

$$W(x) = \frac{M}{l}H(x) + W\delta\left(x - \frac{l}{2}\right) - \delta(x)\frac{(M + W)}{2}$$

Con la transformada de Laplace

$$W(s) = \frac{M}{ls} + We^{-ls/2} - \frac{(M + W)}{2}$$

Ya que el haz es de libre apoyado en ambos extremos

$$y(0) = y2(0) = y(l) = y2(l) = 0$$

Y la ecuación transformada (4) se convierte en

$$Y(s) = \frac{1}{EI}\left[\frac{M}{ls^5} + \frac{W}{s^4}e^{-\frac{ls}{2}} - \left(\frac{M + W}{2}\right)\frac{1}{s^4}\right] + \frac{y_1(0)}{s^2} + \frac{y_3(0)}{s^4}$$

Tomando transformadas inversas da

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{M}{24l}x^4 + \frac{1}{6}W(x - \frac{l}{2})^3H\left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{1}{12}(M + W)x^3\right] + y_1(0)x + \frac{1}{6}y_3(0)x^3$$

Para $x > \frac{l}{2}$

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{M}{24l}x^4 + \frac{1}{6}W(x - \frac{l}{2})^3 - \frac{1}{12}(M + W)x^3\right] + y_1(0)x + \frac{1}{6}y_3(0)x^3$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{M}{24l}x^2 + W(x - \frac{l}{2}) - \frac{1}{2}(M + W)x\right] + y_3(0)x$$

$y(l) = 0$ Entonces tenemos $y_3(0) = 0$ y $y(l) = 0$ nos da

$$0 = \frac{1}{EI}\left[\frac{Ml^3}{24} + \frac{Wl^3}{24} - \frac{1}{12}Ml^3 - \frac{1}{2}Wl^3\right] + y_1(0)l$$

$$y_1(0) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{24}Ml^2 + \frac{1}{16}Wl^2\right]$$

Entonces como resultado

$$y(x) = \frac{1}{48EI}\left[\frac{2}{l}Mx^4 + 8W\left(x - \frac{l}{2}\right)^3 H\left(x - \frac{l}{2}\right) - 4(M + W)x^3 + (2M + 3W)l^2x\right]$$

## IV. CONCLUSIÓN.

En este informe se aplica el método de la transformada de laplace en áreas que en un principio no es fácil notar su aplicación, como lo es la deformación de vigas.

De esta manera nos podemos dar una idea del poder que tienen estas transformaciones, ya que nos simplifica mucho al momento de calcular los movimientos inmediatamente después de aplicar cargas en diferentes posiciones, como en este ejemplo a una viga, en la cual podemos calcular sus desplazamientos respecto del tiempo, lo que nos da una idea de la deformación que posee la misma a consecuencia de la carga aplicada. Y, mediante la introducción de funciones impulsivas, podemos modelar este instante, en el que se aplica la carga de una manera más simple, sin considerar situaciones anteriores.

## REFERENCIAS

[1] Glyn James, “Matemáticas Avanzadas para Ingeniería”, segunda edición, Pearson Educación, 2002. páginas 173-177