Series de Fourier
Aplicación: Temperatura de la tierra

Melina L. Genjo

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
genjo.melina@gmail.com
Marzo 2011

Resumen: El análisis de Fourier es muy importante en varias ramas de la matemática y de la física. En este artículo se muestra una de sus aplicaciones: cálculo de la temperatura en la profundidad de la Tierra.

Palabras clave: serie de Fourier.

I. INTRODUCCIÓN

La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de período T puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período T.

Euler en 1748 propuso que la solución para las oscilaciones de las cuerdas de un violín podía ser expresada como la superposición de dos ondas viajando a velocidad 1 en direcciones opuestas: $u(t,x) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t)$, donde cada onda es una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin n\pi x$$

y como consecuencia

$$u(t,x) = \sum_{n\in Z} \hat{f}(n) \cos n\pi t \sin n\pi x.$$

La contribución de Fourier comenzó en 1807 con sus estudios del problema del flujo del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

presentado a la *Académie des Sciences* en 1811 y publicado en parte como la célebre *Théorie Analytique de la Chaleur* en 1822. Fourier hizo un intento serio por demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. Una prueba satisfactoria de este hecho fue dada por Dirichlet en 1829. Riemann también hizo contribuciones importantes al problema.

El poder extraordinario y la flexibilidad de las series y transformadas de Fourier se ponen de manifiesto en la sombrosa variedad de las aplicaciones que ellas tienen en diversas ramas de la matemática y de la física matemática, desde teoría de números y geometría hasta mecánica cuántica.

II. CÁLCULO DE LA TEMPERATURA DE LA TIERRA

Un problema sencillo pero muy interesante es el de calcular la temperatura de la tierra a una profundidad x a partir de la temperatura de la superficie.

Describamos la temperatura de la superficie terrestre como una función f periódica en el tiempo t y de período 1 (un año). La temperatura $u(t,x)$ en el tiempo $t \geq 0$ y profundidad $x \geq 0$ es también periódica en t y es natural asumir que $|u| \leq \|f\|_\infty$. Bajo estas circunstancias $u(t,x)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada x fijo, $0 \leq x < \infty$, como sigue:

$$u(t,x) = \sum_{n\in Z} c_n(x) e^{2\pi int} \tag{1}$$

con coeficientes de Fourier

$$c_n(x) = \int_0^1 u(t,x)\, e^{-2\pi int} dt \tag{2}$$

Sabemos que la función *u* satisface la ecuación diferencial parcial conocida como Ecuación del Calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{3}$$

por lo tanto,

$$c_n''(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) e^{-2\pi int} dt = 2\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} e^{-2\pi int} dt = 4\pi inc_n \tag{4}$$

En otras palabras, los coeficientes c_n satisfacen la ecuación 1.5:

$$c_n''(x) = \left[(2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}\,(1 \pm i)\right]^2 c_n \tag{5}$$

tomando el signo positivo o negativo de acuerdo a si $n > 0$ ó $n < 0$. Por otra parte, sabemos que $c_n(0) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi int} dt = \hat{f}(n)$. Resolviendo la ecuación, obtenemos que:

$$c_n(x) = \hat{f}(n) \exp\left[-(2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}\,(1 \pm i)x\right] \tag{6}$$

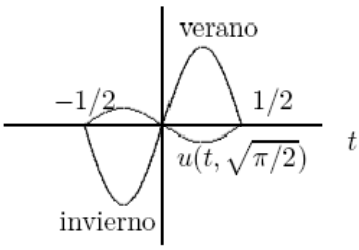
y por lo tanto resulta finalmente

$$u(t,x) = \sum_{n\in Z} \hat{f}(n) \exp\left[-(2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}\, x\right] \exp\left[\left(2\pi int \pm\ (2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}\, ix\right)\right] \tag{7}$$

Supongamos por ejemplo que la temperatura de la superficie viene dada por una función sinusoidal simple $f(t) = \sin 2\pi t$ (lo cual significa que la temperatura anual media $\hat{f}(0) = \int_0^1 f$ es cero). En este caso, la función vendrá dada por:

$$u(t,x) = \exp(-\sqrt{2\pi}x)\sin(2\pi t - \sqrt{2\pi}x) \tag{8}$$

Esta fórmula nos dice que la temperatura a la profundidad $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ queda afectada por el factor $e^{-\pi}$ y está completamente fuera de fase con respecto a las estaciones como lo indica la Figura 1:



III. CONCLUSIONES

En fin, aunque las series de Fourier pueden parecer complicadas a primera vista, no es necesario tener un profundo entendimiento de sus ecuaciones para comprender sus aplicaciones; no obstante, es importante conocer sus propiedades.

REFERENCIAS

[1] "Series de Fourier, Transformadas de Fourier y aplicaciones", [en línea], disponible en http://www.emis.de/journals/DM/v5/art6.pdf [consultada el 15 de marzo de 2011].
[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.
[3] D. Craiem y R. Armentano, *Análisis de Sistemas Lineales*, CEIT, 2010.