Digitalización del sonido

Federico Gastón Supervielle Brouqués

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
fedebrouques@hotmail.com
Septiembre 2011

Resumen: Se da una explicación de los aspectos generales para realizar la digitalización de una señal, en este caso la del sonido, demostrando la importancia y el papel que cumple el desarrollo de Fourier para poder convertir una señal analógica en una digital para un posterior procesamiento.

Palabras clave: Transformada de Fourier, transformada discreta de Fourier (DFT), transformada rápida de Fourier (FFT), muestreo, cuantificación, digitalización

I. INTRODUCCIÓN

Los fenómenos físicos que constituyen una propagación de perturbaciones en un medio, son ondas que admiten representación matemática. Muchas veces es muy importante expresar estas señales de tal manera de poder analizarlas y manipularlas para desarrollar sistemas dinámicos que requieren distintas áreas como lo son la de comunicaciones, ingeniería mecánica y de control, de procesamiento de imágenes, de medicina, entre otras.

Uno claro ejemplo de estas señales es el sonido, el cual es muy utilizado en todo tipo de artefactos electrónicos, y para ello requiere previamente de un gran desarrollo de técnicas para su manipulación, donde la transformada de Fourier cumple un rol muy importante.

II. ONDAS SONORAS

Son del tipo longitudinales, producidas por un cambio de presión del medio en el que se propagan. Estas vibraciones estimulan al sentido del oído humano siempre y cuando se encuentren a una frecuencia entre los 15 y 20.000 hercios.

Cualquier sonido sencillo como una nota musical puede determinarse especificando tres características: la intensidad, el tono y el timbre, que en el lenguaje matemático, estos serán representados por la amplitud, la frecuencia fundamental, y los armónicos respectivamente [2].

A. Representación frecuencial del sonido

La representación frecuencial captura las características espectrales de una señal de audio. Además de la frecuencia fundamental existen muchas frecuencias presentes en una forma de onda. Las componentes de frecuencias armónicas son enteros simples de la frecuencia fundamental, aunque no en todos los casos hay una fundamental clara.

El espectro de una señal viene dado por la evolución de la amplitud y de la fase respecto a la frecuencia. Si consideramos que el sonido cambia constantemente al paso del tiempo, el espectro de este mismo también varía, ya que la representación frecuencial es estacionaria. Para esto, existen métodos de representación de la variación del espectro en función del tiempo, conforme vaya variando el sonido. Uno podría ser un grafico tridimensional expresando los distintos espectros a lo largo del tiempo. Otro método consiste en dibujar un espectrograma, donde el tiempo se representa en el eje horizontal y la frecuencia en el eje vertical, mientras que la amplitud se dibuja a través de distinto colores de traza.

III. DIGITALIZACIÓN DEL SONIDO

Puesto que el sonido se transmite por ondas analógicas, el ordenador no es capaz de trabajar con él. Ese es el motivo por el que se ha de convertir la señal analógica en señal digital. Esto consiste en convertir en código binario los tres parámetros del sonido, es decir, para cada segmento de tiempo hay que dar una información exacta respecto al tono, timbre y la intensidad. Y este proceso se repite en sentido contrario cuando es el ordenador el que hace regenerar sonidos para que se oigan mediante unos altavoces o unos auriculares.

A. Muestreo y cuantificación de la señal

El primer paso a realizar consiste en tomar muestras de la señal sonora cada cierto tiempo y medir la señal analógica. Para lograr un correcto ajuste a la señal real, se debe respetar ciertos parámetros impuestos por el teorema de muestreo de Nyquist Shannon, que afirma que para reconstruir la señal tal cual a la original, el muestro debe ser superior al doble de la frecuencia de la señal. No debe confundirse este proceso con la cuantificación de la señal ya que si bien se toman muestras de forma discreta, estos son exactos y aun no están truncados.

Una vez obtenida la sucesión de muestras, lo que se hace es convertirlas en una sucesión de valores discretos preestablecidos según el código utilizado.

Cabe destacar que este proceso se realiza en forma combinada. La explicación por pasos es solo una táctica teórica para entender su funcionamiento. A continuación se muestra mediante cálculos dicho proceso y aquí veremos la importancia de la transformada discreta de Fourier para lograr tal objetivo.

Sea c_k el k-ésimo coeficiente de Fourier de una señal continua $g(t)$ de período T

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{\frac{-i2\pi kt}{T}}dt \tag{1}$$

vamos a considerar ahora un muestreo de la señal $g(t)$ de N periodos uniformes T/N, entonces tomamos $t_n = nT/N$ con n=0, 1,…, N-1 y $dt = T/N$. De (1) por sumatorias parciales de Reimann obtenemos

$$c_k \approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(t_n)e^{\frac{-i2\pi nk}{N}} \tag{2}$$

Dando lugar a la siguiente definición:

Definición: Dados N números complejos $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$ el N-ésimo punto de la transformada discreta de Fourier es denotado por $\{G_k\}$ donde G_k está definido como

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{\frac{-i2\pi nk}{N}} \tag{3}$$

Para los enteros $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ [4]

Como la Transformada Discreta de Fourier es inversible, de la serie G_k puede recuperarse la sucesión original $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$

$$g_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{\frac{i2\pi nk}{N}} \tag{4}$$

A partir de aquí, la señal analógica muestreada, y por medio de la codificación correspondiente, se transforma la señal cuantificada en una serie de valores binarios.

Observación: [1] Este mismo desarrollo puede lograrse a partir de la transformada de Fourier si se considera la siguiente modificación para referirse a la misma en tiempo discreto

$$\Phi\{g_n\} = g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n e^{-\text{int}} \tag{5}$$

Siempre que converja.
Y su inversa

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{\mathrm{int}} dt \qquad (6)$$

B. Transformada rápida de Fourier

Cuando se tratan situaciones en la que se requiere una gran cantidad de muestreos como puede ser N>1000, el procedimiento se convierte en algo tedioso por la gran cantidad de operaciones que se deben realizar, esto hace que haya más demora en el procesamiento. Cada punto en la imagen transformada requiere de N^2 multiplicaciones complejas y N(N-1) sumas, por lo que es sumamente importante desarrollar un método que minimice el número de operaciones. Para ello se diseñan algoritmos en los que se aplica lo que llamamos la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Uno de estos se conoce como FFT de Potencia de dos, que es el más utilizado. Para tener una idea de cómo funciona este proceso consideremos el siguiente ejemplo.

Un amigo vive en un rascacielos de N pisos. Queremos averiguar en qué planta se encuentra. Nuestras preguntas solo serán contestadas con “si” o “no”. ¿Cuántas preguntas debemos formular para averiguar donde vive?

La aproximación más sencilla y directa es pregunta “¿Vivís en la planta n?” En el mejor de los casos, acertamos en la primera vez, pero en el peor de los casos haremos N-1 preguntas.

En cambio si preguntamos “¿Vivís en la mitad superior del edificio?” excluimos la mitad de las posibilidades de una sola vez. De esta forma se precisan $\log_2 N$, lo cual significa menos cantidad de preguntas.

Vamos a restringirnos al caso de $N=2^Z$ con Z entero. Primero se realiza una formulación matricial de la DFT vista en (3). Para simplificar cálculos tomemos

$$W = e^{\frac{-i2\pi}{N}} \qquad (7)$$

De (3) y (7) se obtiene

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n W^{nk} \qquad (8)$$

Tomamos el caso para N=4, entonces

$$G_k = \sum_{n=0}^{3} g_n W^{nk} \qquad (9)$$

Para k=0, 1, 2, 3. Donde $W = {}^{\frac{-i\pi}{2}}$

Expresando las ecuaciones obtenidas a partir de (9) en forma de matriz-vector obtenemos

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Como $W^4 = W^0, W^6 = W^2$ y $W^9 = W^1$ se tiene

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Realizando la factorización se obtiene

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Si ahora definimos un vector g' como

$$g' = \begin{bmatrix} g'_0 \\ g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Obtenemos g'_0, g'_1, g'_2 y g'_3 mediante una multiplicación y una adición.

De (12) y el vector g' se obtiene el vector transformado reordenado

$$\begin{bmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & G_3 \end{bmatrix}^T \tag{14}$$

De esta forma la cantidad de operaciones se ve reducida de 16 a 4 multiplicaciones y de 12 a 8 sumas. En forma general, de N^2 multiplicaciones se reduce a $0{,}5N\log_2 N$, y de $N(N-1)$ sumas a $N\log_2 N$

Finalmente se procede a reescribir el resultado en forma binaria

$$\begin{bmatrix} G_{00} & G_{01} & G_{10} & G_{11} \end{bmatrix}^T \tag{15}$$

IV. CONCLUSIÓN

Al ver el Análisis de Fourier únicamente desde el punto de vista matemático, en un principio puede parecer no tener importancia. Pero como se observa en este informe la función que cumple es decisiva para una gran cantidad de planteos. Esta es solo una de tantas aplicaciones en las que es necesario aplicar los desarrollos de Fourier para un análisis de señales, y sin estas herramientas sería prácticamente imposible lograr los resultados buscados.

De cierto modo podríamos referirnos a Fourier como un segundo lenguaje para describir funciones el cual hace posible transmitir información de forma digital. Y como en todo lenguaje, es fundamental lograr un buen manejo y fluidez para conseguir interpretar las consignas tanto en el dominio espacial como en el frecuencial.

REFERENCIAS

[1] G. James, "*Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*", Pearson Educación, 517 J233a2, 2002.3

[2] P. G. Hewitt, "Física Conceptual" Tercera Edición, Pearson Education, 530 H599, 1999.1

[3] H. P. Hsu, Änalisis de Fourier", Addison Wesley Iberoamericana, 517.7 H859, 1987.4

[4] J. S. Walker, "Fast Fourier Transforms" Second Edition, CRC Press, 517.7 W152, 1996.2