Análisis de circuitos y sistemas utilizando transformada de Laplace

Gabriel Martín Eggly

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
gabrieleggly_75@hotmail.com
Agosto 2011

Resumen: En este informe se mostrará una herramienta importante para el análisis de circuitos y sistemas. Mediante la utilización de la transformada de Laplace se reducirán las ecuaciones diferenciales que describen a los sistemas a ecuaciones algebraicas sencillas. Los sistemas serán vistos como bloques biterminales caracterizados por una función transferencia con la cual se analizará la respuesta temporal y frecuencial de los mismos. Se tratará el análisis de redes eléctricas cuyos elementos son lineales e invariantes en el tiempo, sin embargo, los modelos matemáticos resultantes (ecuaciones diferenciales ordinarias) son comunes a todo sistema físico que posea las mismas propiedades.

Palabras clave: Transformada de Laplace, función transferencia, respuesta temporal, respuesta frecuencial, polos, ceros, estabilidad.

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de circuitos y sistemas es una rama de la ciencia que intenta describir los fenómenos que ocurren en determinado campo de aplicación de la física, estableciendo modelos matemáticos. En el caso particular de las redes eléctricas se utilizan circuitos para realizar el modelado. Este tipo de modelo se basa en los procesos de conversión de la energía y es básicamente una representación de campos electromagnéticos.

Los circuitos y sistemas lineales requieren del planteo y solución de sistemas de ecuaciones integro-diferenciales para poder caracterizar y analizar su comportamiento. La solución de estas ecuaciones en el dominio tiempo es un procedimiento bastante tedioso, y por ello en su lugar se utilizan los métodos transformados. El propósito de usar una transformación es crear un nuevo dominio en el cual sea más fácil manipular el problema a ser tratado. Una vez obtenidos los resultados en el nuevo dominio, pueden ser transformados inversamente para dar los resultados en el dominio original.

La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil para el análisis de estos sistemas lineales.

El diagrama en bloques de la figura 1 nos muestra los pasos a seguir para el análisis y resolución de un circuito o sistema dado.

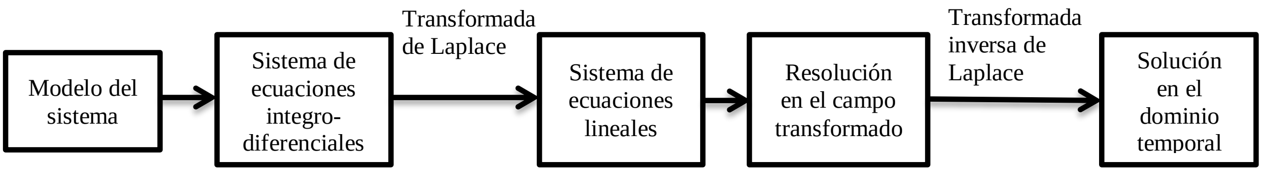

Figura 1 - Diagrama de bloques

Otra ventaja al usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales es que las condiciones iniciales juegan un papel importante en el proceso de transformación, ya que conociendo las mismas, se reemplazan directamente en el resultado de la transformada.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE. TRANSFORMADA INVERSA. PROPIEDADES

La transformada de Laplace de una función f(t) se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

donde f(t) está definida para t≥0 y donde s es la variable compleja del dominio transformado.

Es importante notar que las funciones originales se escriben en minúscula y las transformadas por la misma letra en mayúscula, es decir, F(s) denota la transformada de f(t).

Una vez resuelto el problema en el dominio transformado se aplica la transformada inversa de Laplace para obtener el resultado en el dominio tiempo:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{2}$$

Tanto para el primer paso de transformación como para el último de anti transformación se utilizarán tablas para facilitar el trabajo.

A. *Transformada de derivadas*

Para la solución de ecuaciones diferenciales se hará uso de propiedades de la transformada de Laplace, tales como la transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s.F(s) - f(0) \tag{3}$$

Para realizar la transformada de una derivada se ha supuesto que la función f(t) es continua en t=0, por lo tanto $f(0^-)=f(0)=f(0^+)$. Como se había mencionado anteriormente, la transformada de Laplace resuelve ecuaciones con condiciones iniciales muy fácilmente.

Para un caso más general de una derivada de orden n, se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} - \cdots - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \tag{4}$$

B. *Transformada de integrales*

Al igual que en el caso de la derivada, haciendo uso de la definición de transformada de Laplace se llega a la expresión de la transformada de la integral de f(t):

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{5}$$

III. ANÁLISIS DE CIRCUITOS O SISTEMAS ELÉCTRICOS

Como se mencionó al principio, los sistemas eléctricos a analizar estarán compuestos por elementos lineales e invariantes en el tiempo. Su modelado se hará a través de circuitos eléctricos los cuales se resolverán haciendo uso de las leyes de Kirchhoff. El resultado de este modelo estará dado por una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

El sistema estará constituido por una entrada o excitación que notaremos u(t) y una salida o respuesta y(t), como se ilustra en la figura 2.

Figura 2 - Representación de un sistema con una entrada u(t) y una salida y(t)

El comportamiento del sistema ante la excitación u(t) estará dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + a_0 y(t) = u(t) \tag{6}$$

Donde los términos a_n son coeficientes constantes.

Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (6) utilizando las propiedades de la sección anterior, se llega a la siguiente ecuación:

$$a_n\left[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - .. - y^{(n-1)}(0)\right] + a_{n-1}\left[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - .. - y^{(n-2)}(0)\right] + .. + a_0 Y(s) = U(s) \tag{7}$$

Que resulta ser una ecuación lineal simple de resolver mediante operaciones algebraicas. Si suponemos que para el caso de la ecuación (7) el orden de la misma es n=2, y sean las condiciones iniciales $y^{(1)}(0)=A$ e $y(0)=B$, entonces la expresión se reduce a:

$$[a_2 s^2 + a_1 s + a_0]Y(s) = U(s) + (a_2 s + a_1)B + a_1 A$$

Despejando Y(s), obtendremos la respuesta en función de la excitación U(s) :

$$Y(s) = \frac{U(s) + (a_2 s + a_1)B + a_1 A}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{8}$$

La ecuación (8) representa la transformada de Laplace Y(s) de la respuesta, de donde, conociendo U(s) (transformada de la excitación), y transformándola inversamente, podemos conocer la respuesta temporal del sistema.

C. *Función Transferencia del sistema*

Una manera muy útil de describir a un sistema es mediante la función transferencia, una función racional, la cual es resultado del cociente entre la respuesta Y(s) y la excitación U(s):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{9}$$

Donde K es la ganancia (atenuación) de la función, las raíces del denominador P(s) son los z_i son los ceros y las raíces del numerador Q(s) son los p_i son los polos. Estos últimos de gran importancia ya que a partir de ellos se analizan los aspectos más fundamentales del sistema, como por ejemplo la estabilidad.

D. *Ejemplo: Filtro Activo Pasa Banda*

A continuación se mostrara un ejemplo práctico de un circuito eléctrico: la implementación de un filtro activo pasa banda.

Suponiendo que el amplificador operacional utilizado para la implementación del filtro activo de la figura 3 es ideal, se procede a modelar el circuito mediante las ecuaciones de Kirchhoff y algunas leyes del electromagnetismo:

La tensión en bornes de un capacitor está dada por:

$$Vc(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)dt \xRightarrow{Aplicando\ T.de\ Laplace\ y\ prop.} Vc(s) = \frac{1}{sC}I(s) \tag{10}$$

Llamaremos Z_1 a la impedancia formada por la composición serie entre R_1 y C_1, y Z_2 a la impedancia entre los bornes de R_2 y C_2. De esta forma tenemos que:

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{sR_1C_1 + 1}{sC_1} \tag{11}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 {}^1\!/_{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \tag{12}$$

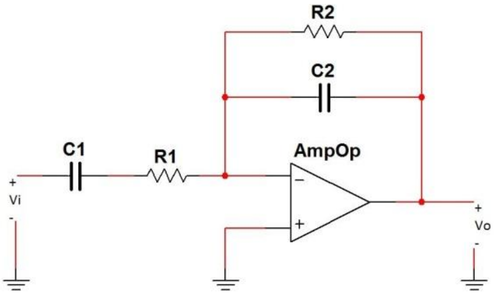

Figura 3 - Filtro activo pasa banda

Como el circuito está realimentado, es posible aplicar el concepto de tierra virtual en un amplificador operacional, por lo que ambos bornes se encontrarán al mismo potencial. Por lo tanto, el (-) estará a un potencia cero, ya que el borne (+) está conectado a tierra, quedando:

$$\frac{V_i}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_2} = 0 \Longrightarrow V_o = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right) V_i \tag{13}$$

Si reemplazamos en la ecuación (13) los resultados de (11) y (12), obtendremos la siguiente expresión:

$$\frac{Vo}{Vi}(s) = \frac{-\frac{1}{R_1C_1}s}{s^2+\left(\frac{R_1C_1+R_2C_2}{R_1C_1R_2C_2}\right)s+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}} \tag{14}$$

Si se reemplaza la variable s por jω (frecuencia) y se grafica el módulo de la función transferencia de la ecuación (14), se obtiene como resultado la respuesta en frecuencia de dicho circuito. En la figura 4 se muestra un diagrama de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa banda.

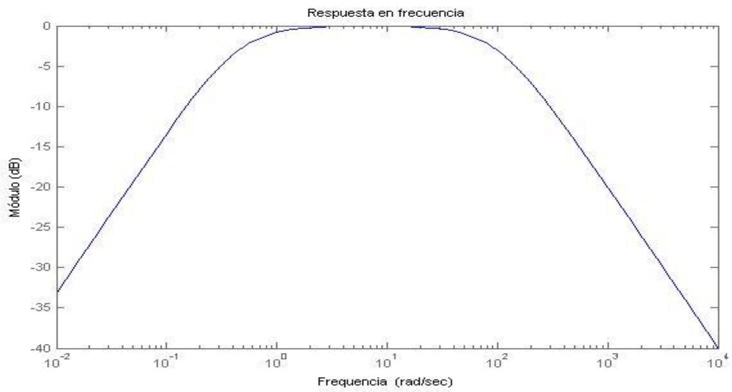

Figura 4 - Respuesta en frecuencia de un Filtro Pasa Banda

Eligiendo los valores de R_1, C_1, R_2 y C_2 adecuadamente, este circuito presentara una impedancia nula para una banda de frecuencia deseada y una alta impedancia para las demás frecuencias.

REFERENCIAS

[1] Glyn James, "*Matemáticas Avanzadas para Ingeniería"*, segunda edición, Pearson Educación, 2002. pp.97-208

[2] Pedro Doñate, "Notas de Curso de Análisis de Circuitos y Sistemas" UNS

[3] Erwin Kreyszig, "*Matemáticas Avanzadas para Ingeniería" Vol.1 Limusa Wiley 2000, pp. 157-358*