Aplicación de la transformada de Laplace en el análisis de respuesta a la frecuencia en filtros RC

Francisco E. Fueyo Guelbenzu

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
francisco.fueyo@hotmail.com
Diciembre de 2011

Resumen: La transformada de Laplace es muy útil para resolver ciertas ecuaciones diferenciales que surgen al analizar circuitos. En este documento se desarrolla su aplicación en la resolución de filtros RC, y su posterior análisis gráfico de respuesta a la frecuencia. Se analizan dos filtros, uno pasa bajos y uno pasa altos a modo de ejemplo para explicar el procedimiento.

Palabras clave: Laplace, transformada, filtro RC, ganancia.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace tiene diversas aplicaciones. Una de las más importantes es que permite resolver ecuaciones diferenciales en forma sencilla. Básicamente, es una función que transforma una función de una variable *t* a una variable *s*.

Matemáticamente, la transformada de Laplace está definida de la siguiente forma:

$$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

No siempre es necesario calcular esta integral, por medio de propiedades y tablas de transformaciones se simplifica la aplicación de esta transformada.

Los métodos de respuesta de frecuencia proveen una herramienta gráfica para el análisis y diseño de sistemas; tales métodos se han desarrollado a partir de consideraciones prácticas, por el cual son usados ampliamente por los ingenieros proporcionando grandes conocimientos sobre el comportamiento de los mismos.

La transformada de Laplace puede utilizarse para obtener las funciones de transferencia de un sistema G(s) remplazando *s* por *iω* y realizar un análisis gráfico del mismo en función de la frecuencia de entrada *ω* variable.

Las variaciones tanto en magnitud |G(iω)| como en argumento arg(G(iω)) cuando varía la frecuencia de ω de la entrada senoidal del sistema constituyen la respuesta de frecuencia. La magnitud |G(iω)| representa la ganancia de amplitud para la entrada, y el argumento arg(G(iω)) representa el corrimiento de fase.

La información contenida en la respuesta de frecuencia del sistema puede ser mostrada convenientemente en forma gráfica. Para ello se hace uso de dos gráficas: una mostrando cómo varía la amplitud |G(iω)| con la frecuencia y otra mostrando cómo varía el corrimiento de fase arg(G(iω)).

II. DETERMINACIÓN DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA DE FILTROS RC

Considerando el sistema mostrado en la figura 1, un filtro RC en configuración pasa bajo, se puede determinar la ecuación diferencial que rige el comportamiento del mismo aplicando las leyes de Kirchhoff como así también las caídas de tensiones producidas en las resistencias y capacitores (elementos fundamentales de cualquier circuito electrónico).

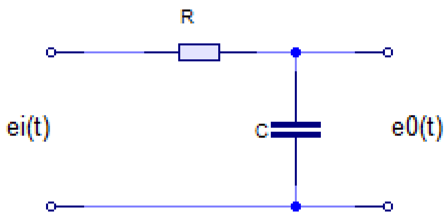


Figura 1 – Filtro RC en configuración pasa bajo.

Si se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial que rige la relación entrada-salida (1), el filtro está caracterizado por la función de transferencia (2).

$$E_0(s) = \frac{1}{RCs+1} E_i(s) \tag{1}$$

$$G(s) = \frac{1}{RCs+1} \tag{2}$$

Así, separando reemplazando s por $i\omega$, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador, y separando en parte real e imaginaria obtenemos:

$$G(i\omega) = \frac{1}{RCi\omega+1} = \frac{1-iRC\omega}{1+R^2C^2\omega^2} = \frac{1}{1+R^2C^2\omega^2} - i\frac{RC\omega}{1+R^2C^2\omega^2} \tag{3}$$

Entonces la ganancia es el módulo de la función transferencia, y el argumento su defasamiento.

$$ganancia = |G(i\omega)| = \sqrt[2]{\frac{1}{(1+R^2C^2\omega^2)^2} + \frac{(RC\omega)^2}{(1+R^2C^2\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{1+R^2C^2\omega^2}} \tag{4}$$

$$defasamiento = arg\big(G(i\omega)\big) = -tan^{-1}(RC\omega) \tag{5}$$

Estas son las dos funciones las cuales se grafican en función de ω para obtener los gráficos característicos la respuesta a la frecuencia del sistema. Para $\omega = 0$ tenemos que:

|G(iω)| = 1, arg G(iω)=0

Y conforme a como aumenta ω, ω → ∞:

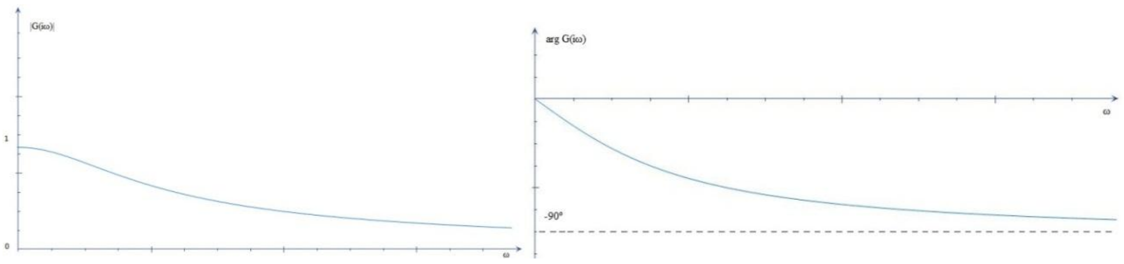


Gráfico 1: De izquierda a derecha, la amplitud de la ganancia y el corrimiento de fase en función de ω.

En el gráfico 1 se muestra la amplitud de la ganancia y el corrimiento de fase. Nótese que a medida que aumenta ω la amplitud de la ganancia disminuye, resultado de la atenuación de las frecuencias altas. A su vez, el corrimiento tiende a desplazar 90 grados la señal de entrada cuando ésta se aproxima a infinito.

De la misma forma que se procede a analizar la respuesta a la frecuencia del filtro mostrado en la figura 1, se puede trabajar con una variante del mismo que es la configuración para frecuencias altas, intercambiando de lugar la resistencia con el capacitor, la misma se muestra en la figura 2. Teniendo en cuenta el mismo procedimiento realizado para encontrar la relación entrada-salida, se aplica transformada de Laplace para obtener la función de transferencia.

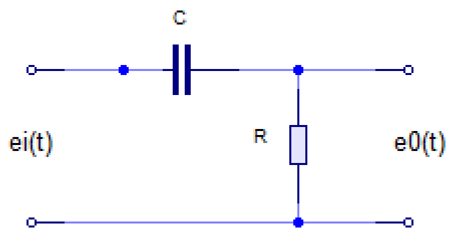


Figura 2: Filtro RC en configuración pasa altos

La relación entrada-salida (6) y su función de transferencia (7):

$$E_0(s) = \frac{sRC}{1+sRC} E_i(s) \tag{6}$$

$$G(s) = \frac{sRC}{1+sRC} \tag{7}$$

Reemplazando s por $i\omega$, multiplicando y dividiendo por conjugado, y separando en parte real e imaginaria se llega a la expresión:

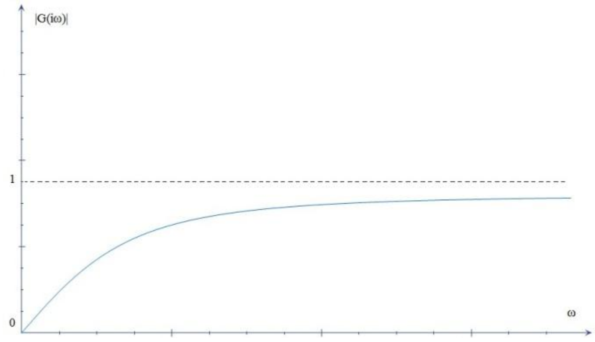
$$G(i\omega) = \frac{i\omega RC}{1+i\omega RC} = \frac{i\omega RC+\omega^2 R^2 C^2}{1+\omega^2 R^2 C^2} = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1+\omega^2 R^2 C^2} + i\,\frac{\omega RC}{1+\omega^2 R^2 C^2} \tag{8}$$

Por lo tanto la ganancia del circuito y su corrimiento son:

$$ganancia = |G(i\omega)| = \sqrt[2]{\left(\frac{\omega^2 R^2 C^2}{1+\omega^2 R^2 C^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega RC}{1+\omega^2 R^2 C^2}\right)^2} = \sqrt[2]{\frac{\omega^4 R^4 C^4+\omega^2 R^2 C^2}{(1+\omega^2 R^2 C^2)^2}} \tag{9}$$

$$defasamiento = \arg\big(G(i\omega)\big) = \ tan^{-1}\left(\frac{1}{RC\omega}\right) \tag{10}$$

Entonces para ω=0 se tiene que |G(iω)| = 0, arg G(iω)=90º, y conforme a como ω → ∞ se obtienen las gráficas de amplitud (izquierda) y corrimiento (derecha) del gráfico 2:



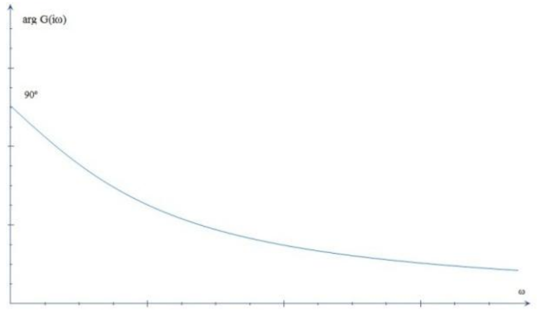


Gráfico 2: De izquierda a derecha, la amplitud de la ganancia y el corrimiento de fase en función de ω.

En este caso la amplitud de la señal de entrada se ve atenuada en bajas frecuencias, pero tiende idealmente a su valor original a medida que ω aumenta a infinito. El corrimiento de fase tiende a cero también a medida que ω aumenta. La atenuación producida entonces es sobre las bajas frecuencias y genera un comportamiento opuesto al del circuito del filtro pasa bajos.

III. Conclusión

Estos métodos de análisis se han desarrollado a partir de consideraciones prácticas, como se anticipó en la introducción, por lo que son útiles a la hora de analizar las respuestas de ciertos circuitos electrónicos que son sometidos a entradas periódicas de frecuencia variable o que sufren corrimientos de fase. Si bien estos métodos ofrecen un resultado ideal, los datos que pueden ser obtenidos al realizar experimentaciones se aproximan fielmente a éstos. En el caso de circuitos que estén regidos por funciones de transferencia de orden superior, puede resultar más tedioso obtener estas gráficas, por lo que se hacen uso de otros métodos como las gráficas de Bode, aunque siempre partiendo del uso de la transformada de Laplace para obtener la función de transferencia.

IV. Referencias

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". *2do. Cuatrimestre 2011*, pp. 56-59. 2011.

[2] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002, pp. 202-206.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 9 de diciembre de 2011].

[4] http://gco.tel.uva.es/tutorial_cir/tema5/f_trans.html, Tutorial de Teoría de Circuitos.