

# TRANSFORMADA DE LAPLACE: OPTIMIZACIÓN EN COHETES DE NAVES ESPACIALES

Lange Franco

*Estudiante de Ingeniería Electrónica*  
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*  
*Franco\_lange3@hotmail.com*  
JUNIO 2015

*Resumen:* En el siguiente informe veremos la utilidad de la transformada de Laplace en el campo de la regulación automática, que se ocupa del control de un proceso. Para esto es necesario considerar sistemas dinámicos, es decir que dependan del tiempo. La entrada de un sistema será (por lo general) una señal analógica o digital. Existen además diversos hechos que perturban dicha señal, cuyo efecto se representa mediante funciones de transferencia. Este tipo de funciones son modelos matemáticos que relacionan la respuesta de un sistema, con una señal de entrada. Laplace fue uno de los primeros matemáticos en describir estos modelos, a través de su transformación matemática.

*Palabras claves:* Laplace, funciones de transferencia, control.

## I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace tiene múltiples aplicaciones para la ingeniería. Una de las muchas formas de emplearla es para la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Laplace fue quien logró transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, facilitando en gran medida la resolución de problemas complejos.

Veremos que la utilización de la transformada de Laplace en las funciones de transferencia son claves para optimizar el consumo de combustible para los cohetes instalados en naves espaciales y de esta forma ahorrar dinero y lograr un crecimiento en la vida útil del equipo.

## II. NECESARIO SABER

### A. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace, se define de la siguiente forma:

Sea  $f: R^+ \rightarrow R$ , es decir una función real definida para  $t \geq 0$ , donde 's' puede ser real o complejo se define una función de 's'

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \text{ siempre y cuando la integral exista} \quad (1)$$

Existen propiedades que facilitan el cálculo de dicha integral, reduciendo la complejidad del problema, por lo que no siempre es necesario calcular la integral.

Es necesario tener en cuenta un concepto utilizado ampliamente en la teoría de control, al hablar de regulación automática, necesaria para poner optimizar el consumo de un cohete por ejemplo, y es el de la función de transferencia.

## B. Función de transferencia

Una función de transferencia es un modelo matemático que a través de un cociente relaciona la respuesta de un sistema (modelada) con una señal de entrada o excitación (también modelada). En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada y salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo. Básicamente esta función describe como reacciona un sistema frente a un estímulo.

La función de transferencia (figura 1) se define de la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (2)$$

H(s): Función de transferencia.

Y(s): Transformada de Laplace de la respuesta.

X(s): Transformada de Laplace de la señal de entrada.

La función de transferencia también puede considerarse como la respuesta de un sistema inicialmente inerte a un impulso como señal de entrada.

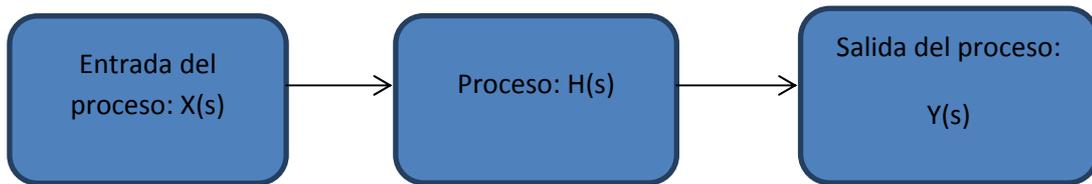


Figura 1: función de transferencia, proceso.

## III. UN POCO SOBRE TEORÍA DE CONTROL

De forma general, podría decirse que el objetivo principal de la teoría de control es proporcionar estrategias para conducir el proceso que nos ocupe a un objetivo deseado.

Para lograr una optimización en el rendimiento de los cohetes es necesario conocer que es el control óptimo, ya que es lo que nos permite entender cómo es posible llevar a cabo dicha tarea.

Control óptimo: Es una técnica matemática usada para resolver problemas de optimización en sistemas que evolucionan en el tiempo y que son susceptibles de ser influenciados por fuerzas externas. Pueden ser sistemas que evolucionan en el tiempo (como lo es en nuestro caso).

Una vez que el problema ha sido resuelto, el control óptimo nos da una senda de comportamiento para las variables de control, es decir, nos indica qué acciones se deben seguir para poder llevar a la totalidad del sistema de un estado inicial a uno final de forma óptima.

El desarrollo de la teoría del control óptimo se inició en la década de los cincuenta gracias al esfuerzo de los científicos rusos y norteamericanos por explorar el sistema solar.

El problema a resolver es el de llevar un vehículo espacial de algún punto de la tierra a algún otro en el espacio en tiempo mínimo y consumiendo la menor cantidad de combustible posible. Es decir, de lo que

se trataba era de encontrar trayectorias óptimas en espacios tridimensionales. Como se puede ver, la solución de dicho problema no podía encontrarse aplicando las técnicas de optimización tradicionales que solo nos dan valores de la variable independiente para los que una función dada alcanza un punto máximo o mínimo, ya sea local o global.

#### IV. APLICACIÓN : ORBITRA DE TRANSFERENCIA DE HOHMANN

Un ejemplo sobre la teoría de control óptimo es cuando se desea que una nave espacial pase de un órbita a otra.

En la astronáutica y la ingeniería aeroespacial, la órbita de transferencia de Hohmann es una maniobra orbital que, bajo las hipótesis comunes de la astrodinámica, traslada a una nave espacial desde una órbita circular a otra utilizando dos impulsos de su motor.

Esta teoría se basa en cambios de velocidad instantáneos para crear órbitas circulares, por lo que es preciso hacer un uso de las funciones de transferencia descritas anteriormente para poder llevar a cabo esta tarea, ya que constantemente los sensores de la nave ingresan datos que deben ser interpretados y de esta forma ir corrigiendo la trayectoria para lograr la óptima translación de la nave hacia la órbita final.

Teniendo en cuenta a (2) podemos obtener la respuesta que necesita dar nuestro proceso o controlador, que en la figura 2 corresponde a un compensador de adelanto  $H(s)=G_c(s)$ , para que el curso de la nave sea el más óptimo. En donde nuestra  $X(s)$  sería las señales captadas por la nave que aportan datos de su localización con respecto a una referencia  $R(s)$ , empuje de los cohetes y la fuerza de atracción de la Tierra, y permiten de esta forma, a través de la función de transferencia  $G_c(s)$ , deducir  $Y(s)$  que nos brinda la respuesta, es decir los cambios en la dirección de la nave, como así también la aceleración o desaceleración que debe seguir el motor, para que la nave no pierda su curso hacia el recorrido más óptimo, como podemos detallar en la figura 3, que responde a un ejemplo en donde se supone una dada función de transferencia.

A partir de la ecuación 2, podemos despejar la respuesta del proceso:

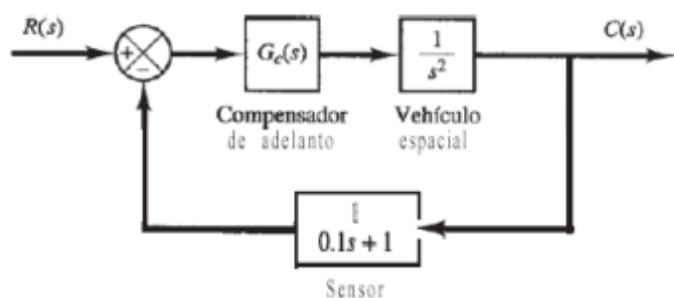
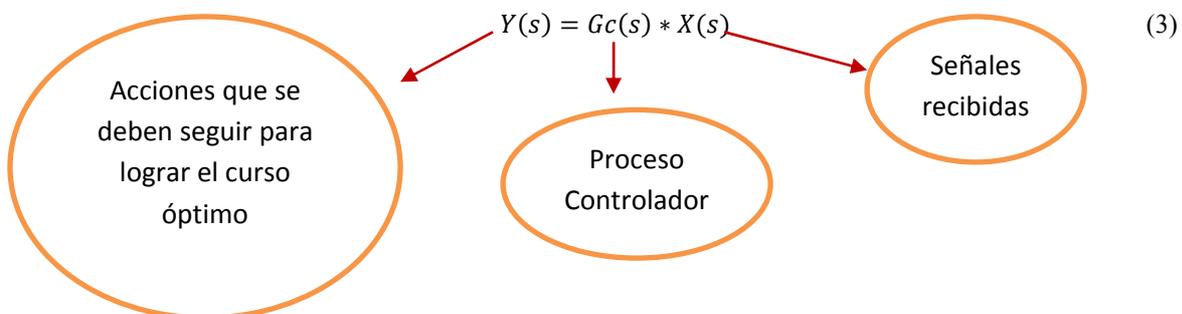


Figura 2: Satélite y Sistema en lazo cerrado.

La órbita de transferencia de Hohmann (figura 3) es una mitad de una orbital elíptica que toca tanto la órbita inicial que se desea dejar y la órbita final que se quiere alcanzar. La órbita de transferencia se inicia disipando el motor de la nave espacial para acelerarla creando una órbita elíptica; esto añade energía a la órbita de la nave espacial. Cuando la nave alcanza la órbita final, su velocidad orbital debe ser incrementada de nuevo para hacer una nueva órbita circular; el motor acelera para alcanzar la velocidad necesaria.

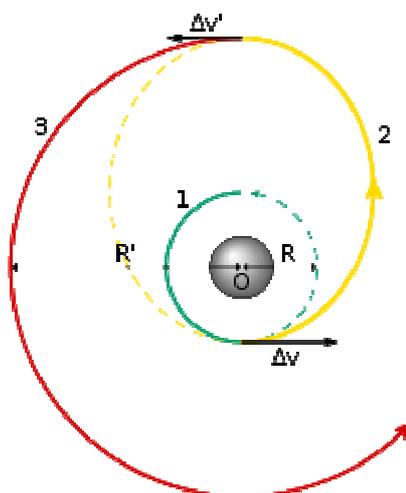


Figura 3: Transferencia de Hohmann

## V. CONCLUSIÓN

Podemos observar que el campo de aplicación de la transformada de Laplace no solo queda en la parte teórica, en la práctica es muy importante ya sea en la ingeniería aeroespacial, en este caso, como así también en todas las áreas de las ingenierías, teniendo innumerables aplicaciones.

La teoría de control, en estos últimos tiempos ha tenido una importante participación e influencia en nuestras vidas, de forma imperceptible, en la mayoría de los casos.

Podemos decir que Laplace, de alguna manera llevo sus logros y descubrimientos fuera de este mundo.

## REFERENCIAS

- [1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja" pag 47.
- [2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en [https://es.wikipedia.org/wiki/Regulaci%C3%B3n\\_autom%C3%A1tica](https://es.wikipedia.org/wiki/Regulaci%C3%B3n_autom%C3%A1tica), [acceso el 26 de julio de 2015].
- [3] [https://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/notas-control.pdf](https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/notas-control.pdf).
- [4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en [https://es.wikipedia.org/wiki/Control\\_%C3%B3ptimo](https://es.wikipedia.org/wiki/Control_%C3%B3ptimo), [acceso el 26 de julio de 2015].
- [5] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en [https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita\\_de\\_transferencia\\_de\\_Hohmann](https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita_de_transferencia_de_Hohmann), [acceso el 27 de julio de 2015].
- [6] Ingeniería de control moderna, Katsuhiko Ogata, tercera edición.