# Aplicación de la Transformada de Laplace en la resolución de circuitos RLC

Franco Moiola

*Estudiante de Ingeniería Electrónica*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*fmoiola@gmail.com*
Marzo 2014

*Resumen*: en el documento siguiente mostraremos una forma sencilla de resolver ecuaciones diferenciales utilizando la Transformada de Laplace. Esto será útil para la resolución de circuitos RLC, circuitos con presencia de elementos pasivos: resitencias, inductancias y capacitores.

*Palabras clave*: Transformada de Laplace, circuitos RLC, ecuaciones diferenciales.

## I. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo desarrollaremos una aplicación de la Transformada de Laplace para resolver circuitos eléctricos en presencia de inductancias, resistencias y capacitores. Para realizar esto, además, aplicaremos las dos Leyes de Kirchoff, indispensables a la hora de resolver circuitos.

## II. CIRCUITOS RLC

En la breve introducción anterior, mencionamos a las resistencias, las inductancias y los capacitares. A ellos, se los menciona elementos pasivos ya que son componentes de los circuitos que disipan o almacenan energía eléctrica o magnética. A continuación haremos una pequeña descripción de cada uno:

1) Capacitor

Un condensador (también llamado capacitor (Figura 1) en el ámbito de la electrónica y ramas de la física aplicada) es un dispositivo pasivo encargado de almacenar energía. Está formado por un par de superficies conductoras en forma de placas, separadas por un material dieléctrico o por el vacío. Las placas, sometidas a una diferencia de potencial, adquieren una carga eléctrica positiva en una de ellas y negativa en la otra, siendo nula su variación de carga total. La unidad de medición de la capacitancia (C) es Faradios (F).

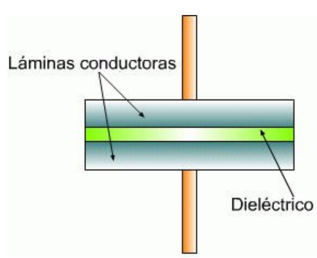



Figura 1: Representación esquemática de un capacitor

2) Inductancia

La inductancia (Figura 2) es una medida de la oposición a un cambio de corriente de un inductor o bobina que almacena energía en presencia de un campo magnético. La unidad de medición de la inductancia (L) es Henrys (H).

Figura 2: Representación esquemática de una inductancia

3) Resistencia

Se le llama resistencia eléctrica (Figura 3) a la igualdad de oposición que tienen los electrones al desplazarse a través de un conductor. La unidad de medición de la resistencia (R) es Ohms (Ω).


Figura 3: Representación esquemática de una resistencia

A su vez, en los circuitos también hay presencia de corriente *i(t)* (medida en Ampere) y de voltaje *v(t)* (medido en Volt). El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga *q(t)* (medida en Coulomb) mediante la relación:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Las relaciones entre el flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje *v(t)* a través de estos elementos en el tiempo *t* son:

- Caída de voltaje a través de la resistencia = R*i* (Ley de Ohm) (2)

- Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{c}\int idt = \frac{q}{c}$ (3)

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito eléctrico está determinada por las **Leyes de Kirchoff:**

**<u>Ley 1</u>**

La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.

**<u>Ley 2</u>**

La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.

## III. CIRCUITO RLC RESUELTO – APLICACIÓN TRANSFORMADA DE LAPLACE

A continuación, resolveremos el siguiente circuito. El mismo está formado por una resistencia *R*, una inductancia *L* y un capacitor *C* conectados en serie a una fuente de voltaje *e(t).* Calcularemos la carga *q(t)* en el capacitor y la corriente *i(t)* sabiendo: i(0)=0, q(0)=0, $\dot{q}$ (0)=0, R=20Ω, L=1H, C=0,01F y e(t)=50V

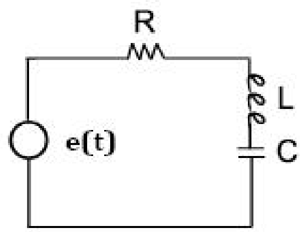



Figura 4: Ejemplo de circuito RLC

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff al circuito de la Figura 4 obtenemos:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)dt = e(t)$$

Sabiendo: $i = \frac{dq}{dt}$:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = e(t)$$

Aplicando Transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación:

$$Ls^2Q(s) + RsQ(s) + 100Q(s) = \frac{50}{s}$$

Es decir:

$$Q(s) = \frac{50}{s(Ls^2 + Rs + 100)}$$

Reemplazando a las constantes L y S por los valores mencionados, obtenemos:

$$Q(s) = \frac{50}{s(s^2 + 20s + 100)}$$

En fracciones simples quedaría expresado de la siguiente manera:

$$Q(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+10)} - \frac{5}{(s+10)^2}$$

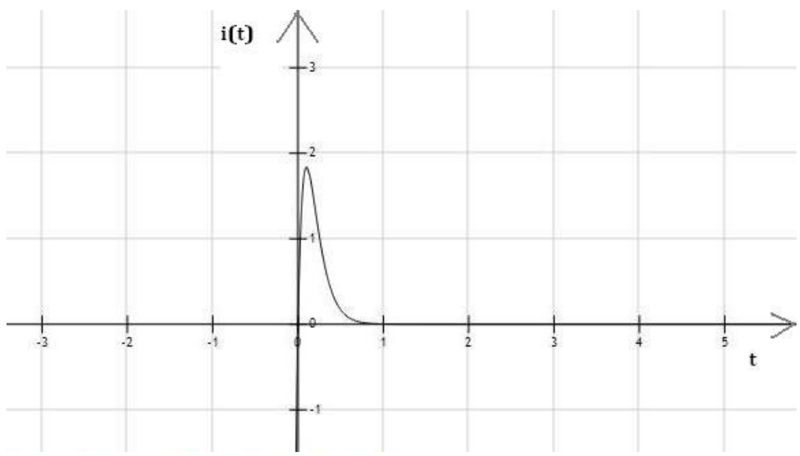
Aplicando la transformada inversa a ambos miembros, resulta:

$$q(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-10t}}{2} - 5e^{-10t}t$$

Por lo tanto, aplicando la definición de corriente obtenemos la misma:

$$i(t) = 50e^{-10t}t$$

Por último, si uno desea ver la evolución de la corriente en el tiempo se puede apreciar en el siguiente gráfico:




## IV. CONCLUSIONES

A lo largo del artículo hemos observado cómo un problema de circuitos eléctricos que se veía complejo y laborioso, aplicando Transformada de Laplace se convierte en un cálculo rápido y sencillo. Esto es muy útil ya que con esta herramienta uno tiene menos posibilidad de equivocarse y las operaciones son más simples.

## REFERENCIAS


[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 14 de marzo de 2014].