Transformada de Laplace
Vibraciones Mecánicas

Franco Toniolo

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
franco_toniolo@hotmail.com

Julio 2012

Resumen: En este informe se mostrara la gran utilidad que posee la transformada de Laplace a la hora de resolver problemas de ciencia y tecnología. En este caso se detallara como utilizar las propiedades de dicha transformada para facilitar la resolución de ecuaciones diferenciales.

Palabras clave: Laplace, Ecuaciones Diferenciales, Vibraciones Mecánicas.

I. Introducción

La transformada de Laplace de una función f(t) definida para todos los números positivos t≥0, es la función F(s), definida por:

$$F(s) = L\ \{f(t)\} = \int_0^{00} e^{-st} f(t)dt$$

Siempre y cuando la integral esté definida.
Para facilitar este cálculo existen unas propiedades como la de linealidad, derivación, integración, etc.

Una vibración mecánica es la oscilación repetida de un punto material o de un cuerpo rígido en torno a una posición de equilibrio. En muchos dispositivos conviene que haya movimientos vibratorios y se generan deliberadamente, por ejemplo, el péndulo utilizado para regular un reloj o una cuerda pulsada de una guitarra o de un piano. En cambio, en la maquinaria rotatoria y en las estructuras la mayoría de las vibraciones son nocivas. Las vibraciones pueden resultar molestas para el operario de la máquina y dañar a ésta y a su apoyo. En este último caso se trata de eliminar dicha vibración o reducirla.

Cuando aplicando una fuerza adicional, se desplaza un punto material o un cuerpo rígido que estaba en equilibrio estable, aparece una vibración mecánica.

Algunos ejemplo:

1. Oscilación horizontal de un cuerpo unido a un resorte cuando se aparta de su posición de equilibrio y luego se suelta.
2. Oscilación circular de un péndulo suspendido por un hilo inextensible de peso despreciable cuando se desplaza de su posición de equilibrio y luego se suelta.

La característica de estos ejemplos es que sobre el cuerpo se ejercen fuerzas recuperadoras que le hacen volver a su posición de equilibrio. No obstante cuando llega a esta situación tiene velocidad no nula y sobrepasa dicha posición. El proceso se repite cuando la fuerza recuperadora vuelve a actuar para volver el cuerpo a su posición de equilibrio. El movimiento se repite una y otra vez y el cuerpo pasa en uno y otro sentido por su posición de equilibrio.

II. CÁLCULO DE VIBRACIONES MECÁNICAS UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

Los sistemas mecánicos de translación pueden ser usados para modelar muchas situaciones e involucran tres elementos básicos: masas (medida en Kg), resortes (medida en N/m) y amortiguadores (Ns/m). Las variables asociadas son el desplazamiento x (t) (medido en m) y la fuerza F(t) (medida en N).

Suponiendo que estamos tratando con resortes y amortiguadores ideales (esto es, suponiendo que se comportan linealmente) las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos en el tiempo t son:

Según la segunda ley de Newton: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime, es decir , F=ma (Fuerza neta es igual a masa por aceleración). De esto de deduce:

Masa: $F\text{-}M\,\frac{d^2x}{dt^2} = M\ddot{x}$ (Ley de Newton)

La Ley de Hooke establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada F.

La forma más común de representarla matemáticamente es mediante la ecuación del muelle o resorte, donde se relaciona la fuerza F ejercida sobre el resorte con la elongación o alargamiento δ producido:

$$F = -k\delta$$

donde k se llama constante elástica del resorte y δ es su elongación o variación que experimenta su longitud.

Por lo tanto:

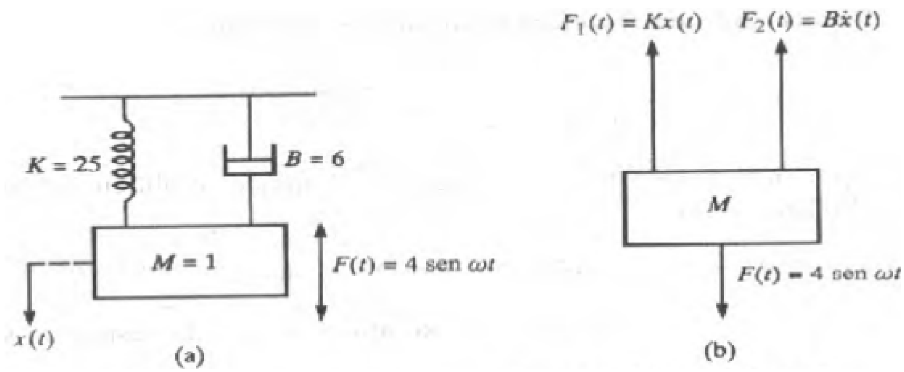
Resorte : $F = K(x_2 - x_1)$ (Ley de Hooke)

Amortiguador: $F = B\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) = B(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$

Para estudiar los movimientos de los cuerpos se siguen los siguientes pasos:

- Planteo las ecuaciones diferenciales correspondientes al problema.
- Aplica la transformada a cada uno de sus términos.
- Luego de la ecuación que obtengo despejo x.
- Anti transformo el resultado anterior.

Ejercicio:



A partir del siguiente diagrama de cuerpo aislado se quiere determinar el desplazamiento resultante x (t) de la masa M, en el tiempo t sabiendo que w=2. Para ello se plantean las siguientes ecuaciones según la ley de newton.

$$M\ddot{x}(t) = F(t) - F_1(t) - F_2(t)$$

Reemplazando por los valores correspondiente se obtiene:

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 25x(t) = 4\sin wt$$

Esta ecuación diferencial representa el movimiento del sistema. Aplicando la transformada de Laplace (como se menciona en el paso 2) se obtiene:

$$(s^2 + 6s + 25)X(s) = [sx(0) + \dot{x}(0)] + 6x(0) + \frac{4w}{s^2 + w^2}$$

Despejando X(s) e incorporando las condiciones iniciales dadas x(0)=x(0) =0 y w= 2

$$X(s) = \frac{8}{(s^2 + 4)(s^2 + 6s + 25)}$$

La cual, resolviendo en fracciones parciales y aplicando la transformada inversa de Laplace lleva a la respuesta requerida

$$x(t) = \frac{4}{195}(7\sin 2t - 4\cos 2t) + \frac{2}{195}e^{-3t}(8\cos 4t - \sin 4t)$$

Como se ha visto en el ejemplo anterior una de sus principales virtudes es que transforma ecuaciones diferenciales lineales en ecuaciones algebraicas, por tanto fáciles de resolver. Una vez resuelta dicha ecuación algebraica se halla la anti transformada obteniéndose la solución de la ecuación diferencial.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable.

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, paginas 135-137.

[3] W Riley , “Ingeniería Mecánica” Vol. Dinámica , paginas 448-450.

[4] http://es.wikipedia.org/, Wikipedia, La enciclopedia libre.