Transformada de Laplace: Aplicación en Circuitos RLC

Wisniowski Francisco

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
fran.wisniowski@hotmail.com

Agosto 2014

Resumen: En la presente nota de aplicación se llevará a cabo la explicación del uso de la Transformada de Laplace para luego ser aplicada en distintas situaciones, aunque se analizará principalmente su utilidad en circuitos RLC. También se dejará en evidencia su ventaja a la hora de resolver ecuaciones diferenciales.

Palabras clave: Transformada, Laplace, Ecuaciones diferenciales.

I. INTRODUCCIÓN

Los circuitos RLC son circuitos cuya característica principal es que están compuestos por resistencias, inductores y capacitores.

A la hora de resolver el circuito, se debe hallar la caída de voltaje en cada uno de los elementos que lo componen, y las corrientes que circulan por el mismo. Para resolver el circuito, se pueden aplicar las Leyes de Kirchhoff [1]:

Ley de las Corrientes de Kirchhoff (LCK): La suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo, es siempre cero;

Ley de Tensiones de Kirchhoff (LTK): La suma de las tensiones de los elementos en un lazo cerrado es igual a la tensión suministrada; por lo tanto, la diferencia de tensión de en un lazo cerrado es cero.

Antes de comenzar a resolver el circuito, se debe tener noción de algunos conceptos básicos referentes a los elementos que componen los circuitos RLC [2]:

Coulomb [C]: Es la unidad de medida para las cargas eléctricas q.

Voltaje [V]: Es el trabajo por unidad de carga realizado para trasladarla de un punto a otro. Su unidad de medida es Volts.

Corriente [A]: Es el flujo (cantidad) de cargas eléctricas que recorren un conductor, en un determinado tiempo t [s]. Su unidad de medida es Amperes, y el valor para la intensidad de corriente está dado por

$$i(t)\ [A] = \frac{dq}{dt}\left[\frac{C}{s}\right] \tag{1}$$

Resistencia [Ω]: Es un elemento pasivo que se opone al paso de la corriente. Su unidad de medida es Ohm, y la relación entre voltaje e intensidad de corriente para una resistencia está dada por:

$$R\ [\Omega]\ =\ \frac{dv}{di(t)}\left[\frac{V}{A}\right] \tag{2}$$

Capacitor [F]: Es un elemento pasivo que es capaz de almacenar carga. Su unidad de medida es Faradios, y la caída de tensión en un capacitor está dada por:

$$v\ [V]\ =\ \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt\ +\ v_0 \tag{3}$$

siendo C la carga del condensador, que se puede expresar como

$$C\ [F]\ =\ \frac{dq}{dv}\left[\frac{C}{V}\right] \tag{4}$$

Inductores [H]: Es un elemento pasivo que almacena energía, en forma de campo magnético. Su inductancia L, es decir, su capacidad de almacenar energía, se mide en Henrios. Su caída de voltaje en un circuito está dada por:

$$v\ [V]\ = L\ \frac{di(t)}{dt} \tag{5}$$

II. RESOLUCIÓN DE UN CIRCUITO RLC

Una vez definidos los conceptos principales, se puede proceder a resolver el circuito RLC de la Figura 1. Para llevar a cabo dicha tarea, se utilizará el método de las mallas.

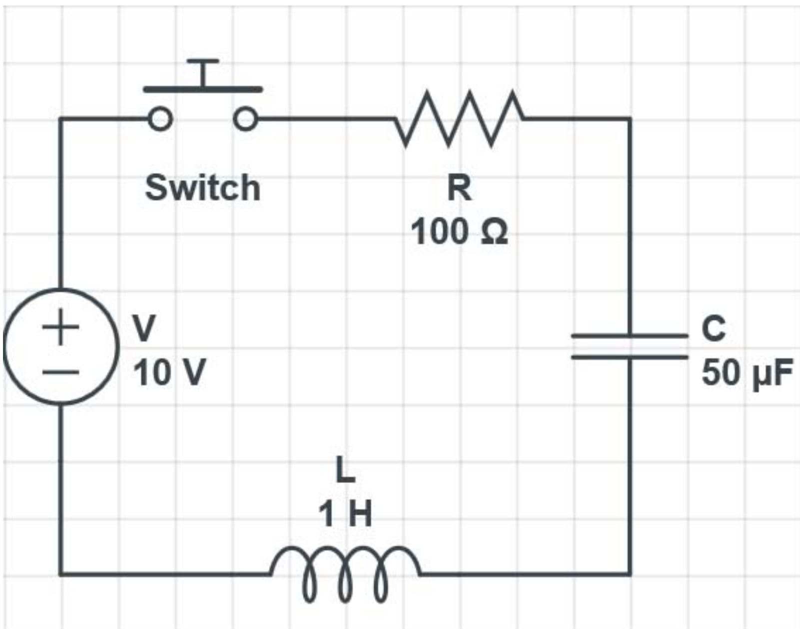

Figura 1. Bosquejo del circuito a resolver.

Una vez que el Switch se cierre en $t = 0$, la corriente comenzará a circular. Luego, la caída de tensión a lo largo del circuito será

$$V - V_R - V_C - V_L = 0 \tag{6}$$

$$v - R \,.\, i(t) - \left(\frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t)dt \; + \; v_0 \right) - L \; \frac{di(t)}{dt} = 0 \tag{7}$$

Dicha ecuación resulta un tanto compleja de resolver, por lo que a continuación se explicará el método de la Transformada de Laplace, para facilitar la resolución de ecuaciones diferenciales.

III. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición 62[3] Sea $f(t)$ una función real definida para $t \geq 0$; si la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ existe donde s puede ser real o complejo, entonces la función $F(s)$ se denomina Transformada de Laplace, y se denota

$$F(s) = \mathcal{L}\{ f(t) \} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{8}$$

Luego la función original $f(t)$ se conoce como la transformada inversa, y se denota

$$\mathcal{L}^{-1}\{ f(t) \} = F(s) \tag{9}$$

Teorema 53[3] Si:

- $f(t)$ es continua a tramos en $0 \leq t < \infty$
- $f(t)$ es de orden exponencial $f(t) = O(e^{\alpha t})$

Luego, $F(s)$ existe para $Re(s) > \alpha$

Para resolver una ecuación diferencial mediante la Transformada de Laplace, se llevan a cabo tres sencillos pasos:

1. Transformar todos los términos a ambos lados de la igualdad, mediante la Tabla de Transformadas de Laplace.

2. Despejar la función $F(s)$ cuya expresión se desea obtener.

3. Antitransformar todos los términos a ambos lados de la igualdad, mediante la Tabla de Transformadas de Laplace.

Finalmente, el resultado obtenido será la expresión de $f(t)$.

Ahora, se puede proceder a resolver el circuito RLC.

$$v - R \,.\, i(t) - \left(\frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t)dt \; + \; v_0 \right) - L \; \frac{di(t)}{dt} = 0 \tag{10}$$

Reemplazando los datos.

$$10 - 100\,.\,i(t) - \left(\frac{1}{50x10^{-6}} \int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_0\right) - 1\,\frac{di(t)}{dt} = 0 \tag{11}$$

Aplicando transformada de Laplace a ambos lados.

$$10\,\left(\frac{1}{s}\right) - 100\,.\,I(s) - \left(\frac{1}{50x10^{-6}}\left(\frac{I(s)}{s}\right) + v_0\frac{1}{s}\right) - \left(s\,I(s) - i(0)\right) = 0 \tag{12}$$

Agrupando los términos I(s), y despejando.

$$I(s) = \frac{10\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{q}{50x10^{-6}}\cdot\frac{1}{s} + i(0)}{100 + \frac{1}{50x10^{-6}}\left(\frac{1}{s}\right) + s} \tag{13}$$

Finalmente, si las condiciones iniciales son $i(o) = 0$, y $q = 0$, antitransformando se obtiene $f(t)$.

$$i(t) = \frac{e^{-50t}\,sin(50\sqrt{7}\,t)}{5\sqrt{7}} \tag{14}$$

IV. Conclusión

Como pudo comprobarse, la Transformada de Laplace es una herramienta muy útil a la hora de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, por lo que no es necesario realizar un trabajo muy laborioso para hallar las soluciones. La Transformada de Laplace es muy sencilla de aplicar, lo que es de gran ayuda frente al método de resolución común y corriente.

Referencias

[1] Charles K. Alexander. Matthew N. O. Sadiku. "Fundamentos de circuitos eléctricos, Tercera Edición", Capítulo 2 "Leyes Básicas", *McGraw-Hill Interamericana,* pp.37-46.

[2] Charles K. Alexander. Matthew N. O. Sadiku. "Fundamentos de circuitos eléctricos, Tercera Edición", Capítulo 1 "Conceptos Básicos", *McGraw-Hill Interamericana,* pp.3-17.

[3] Profesor Guillermo Calandrini. "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja", pp. 48-49.