Transformada de Laplace: Deformación de vigas

Fernandez Gabriel

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
elgabifernandez@hotmail.com

Agosto 2014

Resumen: En el presente informe se explicará cómo utilizar la transformada de Laplace y sus propiedades para determinar la deformación de una viga uniforme efectuada por una carga, intentando interpretar matemáticamente dicho fenómeno físico.

Palabras clave: Transformada de Laplace, deformación de vigas, carga.

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos de la transformada de Laplace pueden ser utilizados para resolver problemas con valores en la frontera y, para mostrar esto, se consideran los métodos de dicha transformada para determinar la deformación transversal de una viga delgada uniforme debido a una carga.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE EN DEFORMACIÓN DE VIGAS

Consideremos una viga delgada uniforme de longitud l y sea y(x) su desplazamiento transversal, a una distancia x medida desde uno de los extremos, de la posición original debido a la carga (figura 1). Entonces, de la teoría elemental de las vigas, tenemos

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -W(x) \tag{1}$$

Donde W(x) es la fuerza transversal por unidad de longitud, considerando la dirección positiva hacia abajo y EI es la rigidez de flexión de la viga (E es el módulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de la viga alrededor de su eje central). Como suponemos que la viga tiene propiedades uniformes de elasticidad y una sección transversal uniforme en toda si longitud, tanto E como I se toman como constantes. La ecuación (1) algunas veces se escribe como

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = W(x) \tag{2}$$

Donde y(x) es su desplazamiento transversal medido hacia abajo y no hacia arriba como en (1).

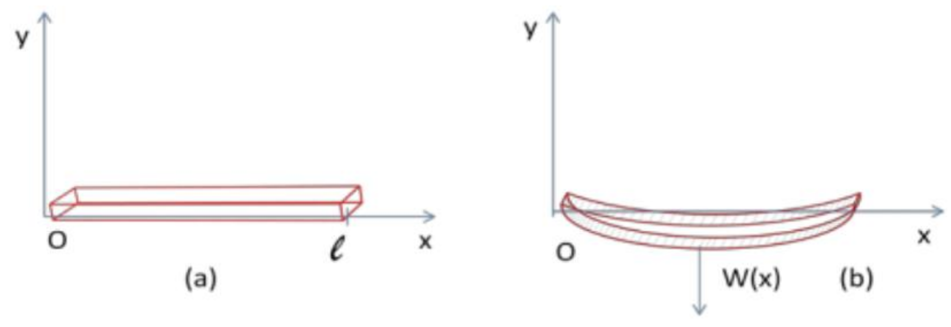

Figura 1 : Deflexión transversal de una viga : (a) posición inicial ; (b) posición desplazada

En los casos cuando la carga es uniforme a lo largo de toda la longitud de la viga, esto es, W(x)=cte, (1) se puede resolver fácilmente con las técnicas del cálculo integral. Mientras que, si la carga no es uniforme, los métodos de la transformada de Laplace tienen una ventaja importante, ya que haciendo uso de las funciones unitarias de Heaviside y de las funciones impulso, el problema de resolver (1) independientemente para varias secciones puede evitarse.

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros en (1) se tiene

$$EI[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y_1(0) - sy_2(0) - y_3(0)] = -W(s) \tag{3}$$

Donde

$y_1(0) = \frac{dy}{dx}_{x=0}$; $y_2(0) = \frac{d^2y}{dx^2}_{x=0}$; $y_3(0) = \frac{d^3y}{dy^3}_{x=0}$

Interpretación física:

$EIy_3(0)$ Es la fuerza cortante en x=0.
$EIy_2(0)$ Es el momento de torsión en x=0.
$y_1(0)$ Es la pendiente en x=0.
$y(0)$Es la deflexión en x=0.

Resolviendo (3) para Y(s) llegamos a

$$Y(s) = -\frac{W(s)}{EIs^4} + \frac{y(0)}{s} + \frac{y_1(0)}{s^2} + \frac{y_2(0)}{s^3} + \frac{y_3(0)}{s^4} \tag{4}$$

Así, se necesita encontrar cuatro condiciones de frontera e idealmente deber ser la fuerza cortante, el momento de torsión, la pendiente y la deflexión en x=0. Sin embargo, en la práctica estas condiciones de frontera no siempre están disponibles. Algunas de ellas son conocidas, pero otras están especificadas en puntos distintos de x=0 a lo largo de la viga.

Las condiciones de frontera usualmente están indicadas en condiciones físicas tales como la siguiente:

a) La viga está libre, o simplemente, sostenida en ambos extremos, indicando que tanto el momento de torsión como la deflexión son cero en ambos extremos, asi que $y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ en x=0 y x=l.
b) En ambos extremos la viga está sujeta o construida en una pared. De esta manera, la viga está horizontal en ambos extremos, así que $y = \frac{dy}{dx} = 0$ en x=0 y x=l.
c) La viga está volada con un extremo libre (esto es, fija horizontalmente en un extremo, con el otro extremo libre). En el extremo fijo (x=0), $y = \frac{dy}{dx} = 0$ y en el extremo libre (x=l), como tanto la fuerza cortante y el momento de torsión son cero $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

Si la carga no es uniforme a lo largo de toda la viga, se hace uso de las funciones escalón de Heaviside y de las funciones de impulso para especificar W(x) en (1).

III. Ejemplo de Aplicación

En el siguiente ejercicio se determinará la deflexión transversal y(x) de una viga de longitud l, la cual esta soportada en ambos extremos y se dobla bajo su propio peso W uniformemente distribuido y una carga P concentrada en $x = \frac{1}{3}l$, como se indica en la figura 2:

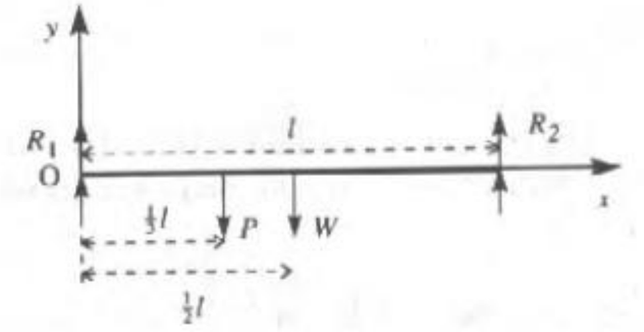

Figura 2

El origen se coloca en el extremo izquierdo de la viga y la deflexión y(x) se mide hacia arriba desde la horizontal en el nivel de los soportes. La deflexión y(x) está dada por (1), teniendo en cuenta el peso W, la carga P y las reacciones del soporte R1 y R2.

Suponiendo que W está concentrado en el centro de la viga:

$R_1 l = \frac{1}{2} Wl + \frac{2}{3} Pl$ Entonces $R_1 = \frac{1}{2} W + \frac{2}{3} P$.

$W(x) = \frac{W}{l} H(x) + P\delta\left(x - \frac{1}{3} l\right) - \left(\frac{1}{2} W + \frac{2}{3} P\right) \delta(x)$

Transformando a ambos lados:

$W(s) = \frac{W}{ls} + Pe^{-ls}/_{3} - (\frac{1}{2} W + \frac{2}{3} P)$

Como la viga está sostenida libremente en los extremos, la deflexión y el momento de torsión son cero en ambos extremos;

$y = 0$ en $x = 0$ y $x = l$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ en $x = 0$ y $x = l$

Entonces (4) se convierte en:

$$Y(s) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{W}{ls^5} + \frac{P}{s^4} e^{-ls}/_{3} - \left(\frac{1}{2} W + \frac{2}{3} P\right)\frac{1}{s^4}\right) + \frac{y_1(0)}{s^2} + \frac{y_3(0)}{s^4}$$

Aplicando la transformada inversa, se obtiene:

$$y(x) = -\frac{1}{EI}(\frac{1}{24}\frac{W}{l} x^4 + \frac{1}{6} P\left(x - \frac{1}{3} l\right)^3 + H\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} W + \frac{2}{3} P\right) x^3\right) + y_1(0)x + \frac{1}{6} y_3(0)x^3$$

Para obtener los valores de las constantes indeterminadas, utilizaremos las condiciones en la frontera x=l, a saber y(l)=0 y y2(l)=0. Para x>1/3l:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{Wx^2}{2l} x^4 + P\left(x - \frac{1}{3} l\right) \quad - \left(\frac{1}{3} W + \frac{2}{3} P\right) x\right) + y_3(0)x$$

Tomando $y_2(l) = 0$ da $y_3(0) = 0$ y tomando $y(l) = 0$ da:

$$-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24} Wl^3 + \frac{4}{81} Pl^3 - \frac{1}{12} Wl^3 + \frac{1}{9} Pl^3\right) + y_1(0)l = 0$$

Entonces:

$$y_1(0) = -\frac{l^2}{EI}\left(\frac{1}{24}W + \frac{5}{81}P\right)$$

Sustituyendo hacia atrás se obtiene y(x):

$$y(x) = -\frac{W}{EI}\left(\frac{x^4}{24l} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}l^2x\right) - \frac{P}{EI}\left(\frac{5}{81}l^2x - \frac{1}{9}x^3\right) - \frac{P}{6EI}\left(x - \frac{1}{3}l\right)^3 H(x - \frac{1}{3}l)$$

O para las dos secciones de la viga

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{W}{EI}\left(\frac{x}{24l} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}l^2x\right) - \frac{P}{EI}\left(\frac{5}{81}l^2x - \frac{1}{9}x^3\right), & 0 < x < {}^1\!/_3\, l \\ -\frac{W}{EI}\left(\frac{x^4}{24l} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}l^2x\right) - \frac{P}{EI}\left(\frac{19}{162}l^2x + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{6}x^2l - \frac{1}{162}l^3\right), & {}^1\!/_3\, l < x < l \end{cases}$$

IV. Conclusión

Es evidente que, al momento de aplicar la trasnformada de Laplace, resulta más simple y sencillo el procedimiento para calcular la deformacion de la viga. Además, si se modifica la ubicacíon de la carga sobre la viga es posible utilizar la misma metodología vista en este informe. Ésto indica claramente que la aplicación de la transformada de Laplace en estos problemas, es una ventaja y una opción muy viable al momento de resolverlos.

Referencias

[1] Glyn James, "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería", segunda edición, Pearson Educación, 2002, páginas 173-177.

[2] Prezi [internet], disponible en http://prezi.com.