La transformada de Fourier en mediciones de radiación

Feliciano A. Garcia Griffiths

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
felicianoariel@gmail.com
Marzo 2014

Resumen: *El presente trabajo muestra la utilización de la transformada de Fourier para facilitar el cálculo de la radiación producida por un campo eléctrico*.

Palabras clave: Transformada de Fourier, Radiación, Campos.

I. INTRODUCCIÓN

Los fenómenos electromagnéticos y radiactivos son descriptos por las ecuaciones de Maxwell y para resolverlas se puede utilizar la transformada de Fourier. En este informe se determinará el campo de radiación originado por una lejana corriente eléctrica constante fluyendo por una superficie conductora.

Este problema se puede aplicar para detectar la radiación producida por antenas y para detectar objetos con radares.

II. DESARROLLO

En una superficie conductora se hace circular una corriente eléctrica que fluye por ésta en el sentido indicado por el vector Js como muestra el gráfico 1.

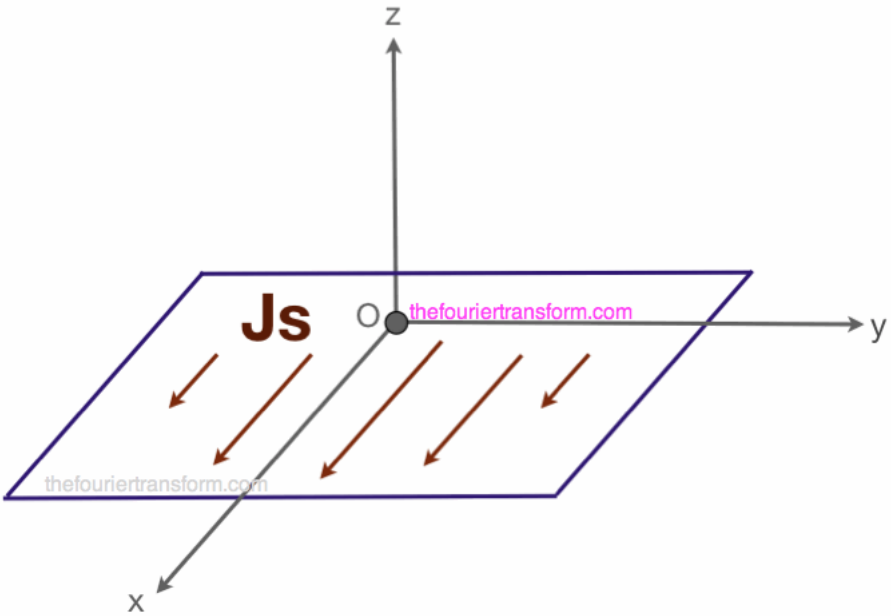

Gráfico 1: Corriente eléctrica que circula por una superficie conductora. [1]

La fórmula del campo de radiación generado por la corriente eléctrica, en coordenadas polares, se escribe de la siguiente manera:

$$E = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_\varphi\hat{\varphi}$$

En campos de radiación, si el punto de medición está sobre la dirección de la propagación de la corriente, la componente radial de E es cero. Entonces:

$$E_r = 0$$

Notando que los campos de radiación se calculan desde una sección muy pequeña de la superficie, el campo de radiación generado en una de estas secciones es:

$$E = \frac{-i\omega\mu e^{-ikR}}{4\pi R}\text{Js}$$

Donde "R" es la distancia desde la fuente hasta donde se quiere medir la radiación, "ω" es la frecuencia angular en rad/s, "μ" es la constante de permeabilidad del medio, "k" es el número de onda circular (o angular) en rad/m y Js es la corriente (que es constante).

En toda la superficie:

$$E = \int_{sup} \frac{-i\omega\mu e^{-ikR}}{4\pi R}\,\text{Js}\,dS$$

Para el cálculo de campos de radiación lejanos a la fuente se asume que 1/R es constante para toda la superficie, pero no así e^{-ikR}.

Dado otro punto "P" dentro de la superficie, con su respectiva distancia $|\overline{OP}|$ al origen, trazando una línea paralela a $\bar{R}$ desde "P" con igual magnitud y sentido se obtiene $\bar{r}$. Se define como Ω al ángulo entre el vector $\overline{OP}$ y $\bar{R}$ y se observa que si hubiera una línea perpendicular a $\bar{R}$ que pasara por nuestro punto de medición, $\bar{r}$ se excedería una distancia igual a |P|cos (Ω). (Ver gráfico 2)

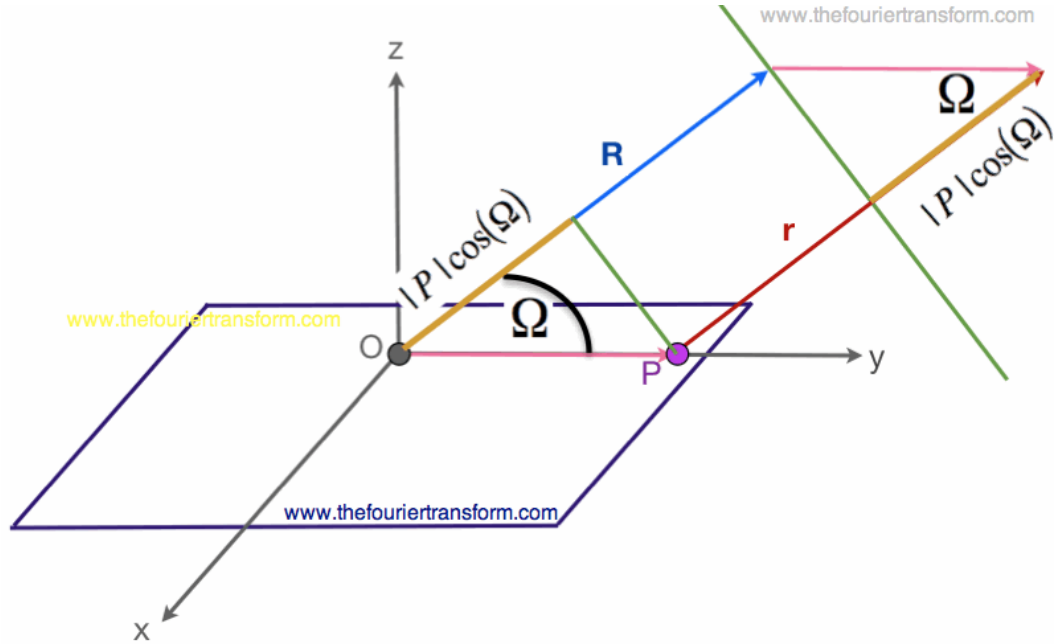

Gráfico 2: En dorado se aprecia la diferencia entre $\bar{R}$ y $\bar{r}$ en relación a la línea verde. [2]

La línea verde es perpendicular a la dirección de $\bar{R}$ en el punto de medición. Ésta ayuda a ver geométricamente cuanto más distancia tiene la onda desde el punto P en comparación con la que sale desde O. Hay que tener en cuenta esto para calcular la fase en la ecuación [3]:

$$E = \int_{sup} \frac{-i\omega\mu e^{-ik(R-P\cos\Omega)}}{4\pi R}\,\text{Js}\,dS = \frac{-i\omega\mu e^{-ikR}}{4\pi R}\int_{sup} e^{ik(P\cos\Omega)}\,\text{Js}\,dS$$

Como ejemplo se supone que la superficie donde fluye la corriente es una región que está en el plano XY, de medidas $a$en la dirección del eje X y b en la dirección del eje Y:

$$J_s(x,y) = \begin{cases} \boldsymbol{J}\hat{\boldsymbol{x}}, & \frac{-a}{2} \le x \le \frac{a}{2}\ ,\ \frac{-b}{2} \le y \le \frac{b}{2} \\ 0, & \text{en cualquier otra región} \end{cases}$$

Reescribiendo la corriente como el producto de dos funciones de una variable queda de esta manera:

$$J_s(x,y) = J(x)J(y)\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$J(x) = \begin{cases} \boldsymbol{J}, & \frac{-a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0, & \text{en cualquier otra región} \end{cases}$$

$$J(y) = \begin{cases} 1, & \frac{-b}{2} \le y \le \frac{b}{2} \\ 0, & \text{en cualquier otra región} \end{cases}$$

Además:

$$|P| \cos\Omega = P \cdot \hat{r} \ = x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \mathrm{y} \operatorname{sen}\theta \sin\varphi$$

Reemplazando en la fórmula del campo E:

$$\int_{sup} e^{ik(P\ cos\Omega)} J_s\, dS = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik(P\ cos\Omega)}\, \boldsymbol{J}\hat{\boldsymbol{x}}\, dx\ dy = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \boldsymbol{J}\hat{\boldsymbol{x}}\, e^{ik(x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \mathrm{y} \operatorname{sen}\theta \sin\varphi)}\ dx\ dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_s(x,y)\ e^{ik(x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \mathrm{y} \operatorname{sen}\theta \sin\varphi)}\ dx\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(x)J(y)\hat{\boldsymbol{x}}\, e^{ik(x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \mathrm{y} \operatorname{sen}\theta \sin\varphi)}\ dx\ dy =$$

$$= \hat{\boldsymbol{x}} \int_{-\infty}^{\infty} J(x)\ e^{ikx \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}\ dx \int_{-\infty}^{\infty} J(y) e^{ik\,\mathrm{y} \operatorname{sen}\theta \sin\varphi}\ dy =$$

$$= \hat{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{F}\{J(x)\}\big|_{\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{k}\ \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}\ \ \boldsymbol{F}\{J(y)\}\big|_{\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{k}\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}$$

Calculando las transformadas de Fourier de cada componente se obtiene:

$$\boldsymbol{F}\{J(x)\}\big|_{\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{k}\ \operatorname{sen}\theta \cos\varphi} = \boldsymbol{F}\{\textbf{Pulso rectangular de amplitud } \boldsymbol{J}\} = \frac{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{J} \cdot \mathbf{sen}\left(\frac{\boldsymbol{wa}}{\mathbf{2}}\right)}{\boldsymbol{w}} =$$

$$= \frac{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{J} \cdot \mathbf{sen}(-\frac{\boldsymbol{ak}}{\mathbf{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)}{-\boldsymbol{k}\ \operatorname{sen}\theta \cos\varphi} = \frac{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{J} \cdot \mathbf{sen}(\frac{\boldsymbol{ak}}{\mathbf{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)}{-\boldsymbol{k}\ \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}$$

[3]

$$\boldsymbol{F}\{J(y)\}\big|_{\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{k}\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi} = \boldsymbol{F}\{\textbf{Pulso rectangular de amplitud } \mathbf{1}\} = \frac{\mathbf{2\ sen}(\frac{\boldsymbol{bk}}{\mathbf{2}} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)}{-\boldsymbol{k}\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}$$

Parametrizando el versor $\hat{\boldsymbol{x}}$ en coordenadas esféricas y recordando que se anula en la coordenada radial se observa que:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi)\hat{\boldsymbol{r}} + (\cos\theta \cos\varphi)\hat{\boldsymbol{\theta}} - (\operatorname{sen}\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\cos\theta \cos\varphi)\hat{\boldsymbol{\theta}} - (\operatorname{sen}\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Finalmente se llega a:

$$E = \frac{-i\omega\mu e^{-ikR}}{4\pi R} \frac{\mathbf{4} \cdot \boldsymbol{J} \cdot \mathbf{sen}(\frac{\boldsymbol{ak}}{\mathbf{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi)}{\boldsymbol{k} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi} \frac{\mathbf{sen}(\frac{\boldsymbol{bk}}{\mathbf{2}} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)}{\boldsymbol{k} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi} \left((\cos\theta \cos\varphi)\widehat{\boldsymbol{\theta}} - (\operatorname{sen}\varphi)\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \right)$$

III. Conclusión

Se llegó a una fórmula final sin resolver las integrales de superficie sino utilizando la transformada de Fourier, facilitando el trabajo. Dicha fórmula depende de R (distancia), a, b (medidas de la placa), θ y φ (ángulos formados entre R y el eje X y entre R y el eje Z) y J (magnitud de la corriente).

Referencias

[1] [2] [3] thefouriertransform.com, [internet], disponible en: http://www.thefouriertransform.com/, [acceso el 20 de marzo de 2014].

[4] Pares clásicos de la transformada de Fourier, [internet], disponible en: http://es.wikiversity.org/wiki/, [acceso el 20 de marzo de 2014].