TRANSFORMADA DE LAPLACE: APLICACIÓN EN CIRCUITOS RLC

Federico de la Iglesia

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
federicodelaiglesia@gmail.com
Agosto 2013

Resumen: En el presente informe se tratará la aplicación de la Transformada de Laplace en la resolución de circuitos eléctricos, más específicamente en circuitos RLC (resistivo-capacitivo-inductivo).Una ventaja distintiva al usar la Transformada de Laplace es que nos permite reemplazar la operación de diferenciación por una operación algebraica.

Palabras Claves: Circuitos, Kirchhoff, Transformada de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, corriente.

I. INTRODUCCION:

Si consideramos a una función f (t) con variable t representando al tiempo (esto quiere decir que $t \geq 0$); la **Transformada de Laplace**, que se expresa con el símbolo $\mathcal{L}$ {f (t)}, se define como:

$$\mathcal{L}\,\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

En donde la variable S es un número real o complejo y e^{-st} es llamado el núcleo de la transformación. El símbolo $\mathcal{L}$ es el operador de la **Transformada de Laplace**; el cual transforma a una función f (t), perteneciente al dominio del tiempo, en una función F(s), perteneciente a un dominio de frecuencia complejo. Ver Figura (1).

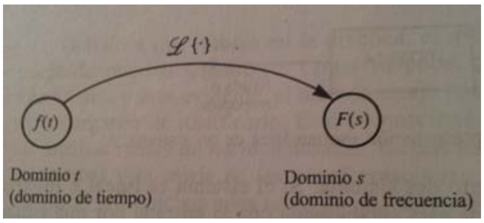

Figura 1. Descripción de la transformación

II. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE:

Una vez analizada la definición de Laplace, comenzamos a interiorizarnos en el tema, pero primero es necesario evaluar las condiciones necesarias para la aplicación de la transformada.

Existen dos condiciones suficientes para la existencia de la **transformada de Laplace**; La primer condición es que la función f (t) sea continua a tramos, y la segunda condición es que sea de orden exponencial. Ahora bien, una función se dice que es de orden exponencial si:

$$|f(t)| < Ae^{\alpha t} \qquad \text{para } t > t_0 \qquad (2)$$

Siendo A y t_0 constantes positivas. Si se cumplen estas condiciones, la integral de la transformación directa es convergente para todo $\beta > \alpha$, con α, β pertenecientes a los reales; y existe F(s). En el análisis de circuitos, todas las funciones cumplen estas condiciones.

Si consideramos el siguiente par de **transformadas de Laplace**:

$f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad Re(s) > p \qquad\qquad p \in R$

$g(t) \leftrightarrow G(s) \qquad Re(s) > q \qquad\qquad q \in R$

Podemos distinguir algunas propiedades de la **Transformada de Laplace**:

- Linealidad: $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \qquad Re(s) > \max(p, q)$
- Traslación:

  Para α □ □

  $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(s - \alpha) \qquad Re(s) > p + Re(\alpha)$

  Para $\alpha > 0$

  $\mathcal{L}\{h(t-a) f(t-a)\} = e^{-as} F(s) \qquad Re(s) > p$

- Cambio de escala:

  Para $\alpha > 0$

  $\mathcal{L}\, f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}) \qquad Re(s) > ap$
- Derivadas

  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\} \qquad Re(s) > p$

- Integrales

  $\mathcal{L} \int_0^t f(t)dt \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s) \qquad Re(s) > \max(p, 0)$

Continuando con el análisis matemático del tema, se puede observar en (1) que el límite inferior de la integral es cero. Esto quiere decir que el comportamiento de la función f (t) en los momentos previos al análisis, es decir, cuando $t < 0$, es ignorado. Pero para las mayorías de las aplicaciones a la ingeniería como en el caso de **circuitos**, lo que nos interesa es el sistema físico. Esto quiere decir que analizamos el comportamiento de un **circuito** partiendo de un dato base o mejor dicho una entrada, y finalizando en una salida. Lo anterior a la entrada no es de interés ya que se trata con funciones que varían en el tiempo y por lo tanto no son anticipantes.

Existe un desarrollo intenso e interesante sobre el tratamiento de los valores negativos de t, pero en esta aplicación no nos enfocaremos en ese punto, sino que nos enfocaremos en la resolución de **ecuaciones diferenciales ordinarias** mediante la implementación de **Transforma de Laplace**, utilizando la función de Heaviside o escalón unitario, que se define como:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$$

III. CIRCUITOS ELECTRICOS:

Empezaremos definiendo algunos conceptos básicos:

La resistencia es la relación entre la diferencia de potencial y la corriente, y esta expresado por: $R = \frac{\Delta V}{I}$

La capacitancia de cualquier condensador es la relación entre la carga Q de cualquiera de los conductores y la diferencia de potencial ΔV entre los mismos: $C = \frac{Q}{\Delta V}$

La inductancia es una medida de la oposición que ofrece una bobina al cambio en la **corriente** que registra:$L = \frac{NV}{I}$, donde N es el número de vueltas que contiene una bobina.

Los circuitos eléctricos RLC son construidos con tres elementos básicos: resistores (que tienen resistencia R, medida en ohmsΩ), capacitores (que tiene capacitancia C, medida en farads F) e inductores (que tienen inductancia L, medida en henrys H). Estos elementos se pueden observar en la Figura 2:

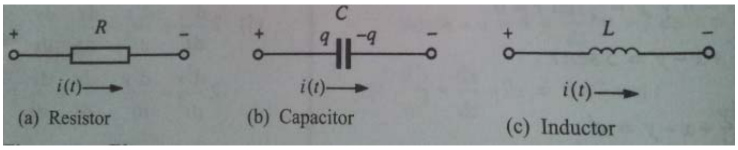

Figura 2. Elementos componentes de un circuito eléctrico RLC

Además de los elementos antes mencionados, se tienen variables asociadas como la **corriente** I (t) (medida en amperes A) y voltaje V (t) (medido en volts V). El flujo de **corriente** en el circuito está relacionado con la carga q (t) (medida en coulombs C) mediante la relación:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \qquad (3)$$

Las relaciones entre el flujo de **corriente** I (t) y la caída de voltaje V (t) a través de los elementos en el tiempo t son:

- Caída de voltaje a través de la resistencia: RI(t)
- Caída de voltaje a través del capacitor: $\frac{1}{c}\int I(t)dt = \frac{q}{c}$

Teniendo en cuenta la relación ΔV= IR, las interacciones entre los elementos individuales que forman un **circuito** eléctrico están determinadas por las leyes de **Kirchhoff**:

- **Ley de las uniones**: La suma de las corrientes que entran a cualquier unión (nodo) debe ser igual a la de las corrientes que salen de ella:

$$\sum I_{entrada} = \sum I_{salida} \qquad (4)$$

- **Ley de las mallas**: La suma de las diferencias de potencial aplicadas a todos los elementos alrededor de un circuito cerrado debe ser igual a cero:

$$\sum_{\substack{circuito \\ cerrado}} \Delta V = 0 \qquad (5)$$

IV. RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

La **Transformada de Laplace** provee un método para resolver **ecuaciones deferenciales ordinarias**, el cual es muy sencillo de implementar. El proceso consta de tres pasos generales:

1. Una vez planteada la **ecuación diferencial**, se aplica la **Transformada de Laplace** utilizando propiedades y la definición, de manera que quede un problema más sencillo para resolver.
2. Se resuelve la ecuación algebraica utilizando métodos como fracciones simples, factorización, entre otros.
3. La solución del sistema se anti-transforma para obtener la solución del problema dado.

V. IMPLEMENTACION EN CIRCUITO RLC:

En el circuito RLC representado en la Figura (3) no existe carga inicial en el condensador. Si se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, demostraremos como hallar la intensidad de corriente que circula aplicando Laplace:

La ecuación del circuito, utilizando la Segunda Ley de Kirchhoff (**Ley de las mallas**), es la siguiente:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt = V \qquad (6)$$

Como se puede observar, es una **ecuación diferencial** de alta complejidad que resulta muy difícil de resolver. Sin embargo, al aplicar la **Transformada de Laplace**, se simplifica de manera considerable:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^{+}) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{q_0}{sC} = \frac{V}{s} \qquad (7)$$

Las condiciones iniciales son $Li(0^{+}) = 0 \ y \ \frac{q_0}{sC} = 0$. Sustituyendo las constantes del circuito en (7) se obtiene:

$$2I(s) + sI(s) + \frac{1}{0.5s}I(s) = \frac{50}{s}$$

Ahora si despejamos I(s),

$$I(s) = \frac{50}{s^2+2s+2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

Siendo j la unidad compleja, para no ser confundido con la corriente. Si desarrollamos fracciones simples, se obtiene:

$$I(s) = \frac{25j}{(s+1-j)} - \frac{25j}{(s+1-j)} \qquad (8)$$

Una vez hallado I(s) anti-transformamos para encontrar la corriente que circula por el circuito;

$$i(t) = j25\left[e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}\right] = 50e^{-t}sen(t) \qquad (9)$$

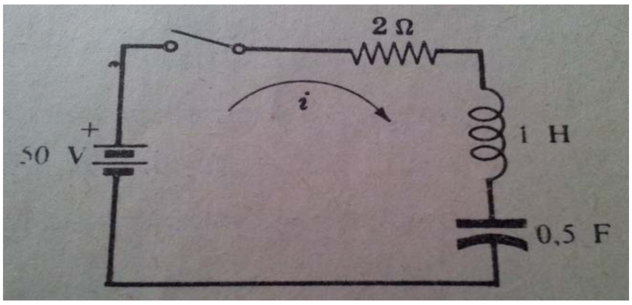

Figura 3: Circuito RLC

VI. CONCLUSION

En este informe se buscó demostrar que la aplicación de la Transformada de Laplace suele ser de mayor utilidad para resolver ecuaciones complejas, que los métodos básicos. Uno de los objetivos que se debe plantear un ingeniero es resolver un problema optimizando el tiempo y utilizando métodos ingeniosos, y precisamente esta aplicación es una manera de implementar este concepto. La transformada de Laplace, al igual que la transformada de Fourier presenta una mejor calidad de resolución en un tiempo sumamente escaso.

VII. REFERENCIAS:

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 1er. Cuatrimestre 2013, pags. 48-53. 2013.

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, pags. 99-131, 130-132.

[3]Raymond A. Serwey, "Electricidad y magnetismo". California State Polytechnic University-Pomona, sexta edición 2007, pags.131-136, 165-168, 316-319.

[4] Joseph A, Edminister, "Teoría y problemas de Circuitos Eléctricos". University of Akron, primera edición 1970, pags. 265-269.