Transformada de Laplace: Vibraciones Mecánicas.

Anania Federico

Estudiante de Ingeniería Eléctrica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
federicoanania@live.com
Agosto 2014

Resumen: el objetivo de este trabajo es utilizar el método de transformada de Laplace en un modelado matemático de un sistema real de vibraciones mecánicas. Para esto, es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, variables respecto al tiempo. Esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales respecto al tiempo para representar matemáticamente el comportamiento de tal sistema. Se evaluará un modelo que representa sistemas mecánicos de traslación relacionados a resortes y amortiguadores.

Palabras clave: Laplace, ecuaciones diferenciales, desplazamiento, ley de Newton, ley de Hooke.

I. INTRODUCCIÓN

En el proceso de resolución de este tipo de problemas la transformada de Laplace es una herramienta de gran utilidad, es utilizada para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes al realizar transformaciones a través de diversas propiedades de las mismas.
Por ende se busca reducir la problemática planteada a una ecuación diferencial, se resuelve y se interpreta el resultado Anania Federico
obtenido.

Generalmente se obtiene una solución de la forma $Y(S) = \frac{P(S)}{Q(S)}$ donde P y Q son polinomios en s. Una vez hecha la transformación se trabaja de manera algebraica con la expresión y luego se aplica la transformada inversa $(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(S)\}$ para obtener el resultado del problema planteado. Este procedimiento se lo conoce como desarrollo de Heaviside.

La transformada de Laplace se define como:

$$\mathcal{L}\,[\mathbf{f(t)}] = \mathbf{F(s)} = \int_0^{\infty} \boldsymbol{e^{-st} f(t) dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Donde f(t) es la función original, F(s) es la transformada, s es una variable compleja y e^{-st} es llamado el núcleo de la transformación.

Estas son algunas propiedades de la transformada de Laplace que se utilizan a lo largo del trabajo:

$$\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(s)} \qquad \boldsymbol{Re(s)} > p$$
$$\boldsymbol{g(t) \leftrightarrow G(s)} \qquad \boldsymbol{Re(s)} > q$$

Propiedad de linealidad (para α, β ϵ C):

$$\boldsymbol{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t) \leftrightarrow \alpha\, F(s) + \beta\, G(s)} \;\; \boldsymbol{Re(s)} > \text{máx}(p, q)$$

Propiedades de derivadas:

$$\boldsymbol{f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)} \qquad \boldsymbol{Re(s)} > p$$

II. VIBRACIONES MECANICAS

Los sistemas mecánicos de traslación pueden ser usados para modelar muchas situaciones e involucran tres elementos básicos: **masas** (con masa M, medida en kg), **resortes** (con rigidez del resorte K, medida en N/m) y **amortiguadores** (con coeficiente de amortiguamiento B, en Ns/m). Las variables asociadas con el desplazamiento x(t) (medido en m) y la fuerza F(t) (medida en N).

Suponiendo que estamos tratando con resortes y amortiguadores ideales (esto es, suponiendo que se comportan linealmente), las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos en el tiempo t son:

- $MASA : F = \frac{M\partial^2 x}{dt^2}$ LEY DE NEWTON
- RESORTE: F= $K(x_2 - x_1)$ LEY DE HOOKE
- AMORTIGUADOR: F=B $(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt})$

Usando estas relaciones llegamos a las ecuaciones del sistema, las que pueden ser analizadas usando las técnicas de transformada de Laplace.

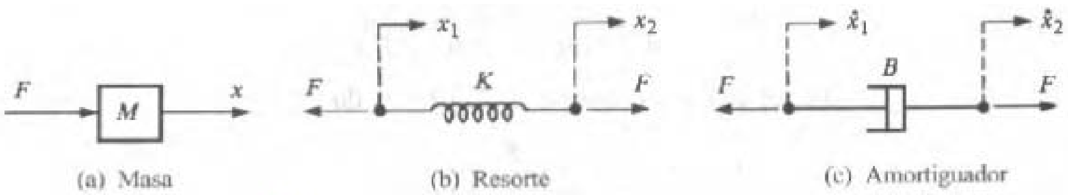

Figura 1: Elementos componentes de un sistema mecánico de traslación.

III. EJEMPLO

Considere el sistema mecánico de la figura 2, que consiste en dos masas $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$, cada una atada a una base fija por un resorte, con constantes $K_1 = 1$ y $K_3 = 2$ respectivamente, y atadas entre sí por un tercer resorte con constante $K_2 = 2$.

El sistema es soltado desde el reposo en el tiempo t = 0 en una posición en la cual M_1 está desplazada una unidad a la izquierda de su posición de equilibrio y M_2 está desplazada 2 unidades a la derecha de su posición de equilibrio. Despreciando todos los efectos de fricción, determine las posiciones de las masas en el tiempo t.

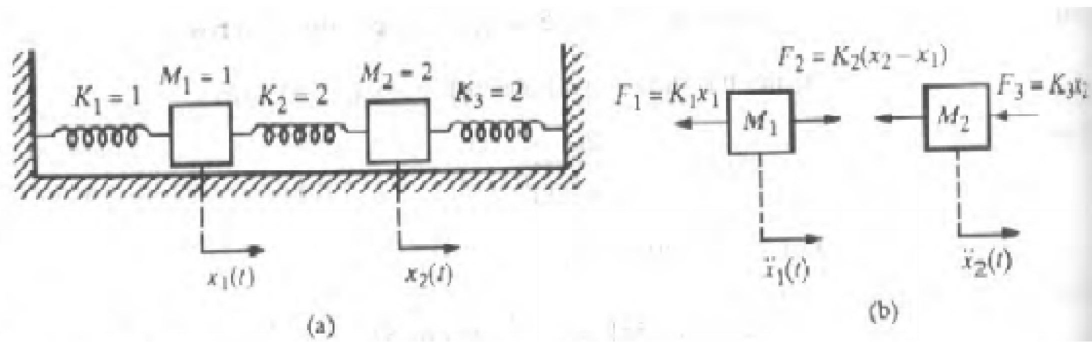

Figura 2.13 Sistema de dos masas

Solución:

Sean x1(t) y x2(t) los desplazamientos de las masas M_1 y M_2 respectivamente desde sus posiciones de equilibrio. Como todos los efectos de friccion son despreciados, las únicas fuerzas que actúan sobre las masas son las fuerzas de restauración debidas a los resortes, como se muestra en la figura **2.13 (b).** Aplicando la ley del movimiento de Newton a M_1 y M_2 respectivamente, se obtiene

$$M_1\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 = K_2(x_2 - x_1) - K_1x_1$$

$$M_2\ddot{x}_2 = -F_3 - F_2 = -K_3x_2 - K_2(x_2 - x_1)$$

Que, sustituyendo los valores dados para $M_1, M_2, K_1, K_2 \; y \; K_3$, dan

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2\ddot{x}_2 + 4x_2 - 2x_1 = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace llegamos a las ecuaciones

$$(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = sx_1(0) + \dot{x}_1(0)$$

$$-X_1(s) + (s^2 + 2)X_2(s) = sx_2(0) + \dot{x}_2(0)$$

Como $x_1(t) \; y \; x_2(t)$ denotan desplazamientos hacia la derecha de las posiciones de equilibrio, tenemos que $x_1(0) = -1 \; y \; x_2(0) = 2$. También, debido a que el sistema es soltado desde el reposo, se tiene $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Incorporando estas condiciones iniciales, las ecuaciones transformadas son

$$(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = -s$$

$$-X_1(s) + (s^2 + 2)X_2(s) = 2s$$

De aquí

$$X_2(s) = \frac{2s^3 + 5s}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}$$

Resolviendo en fracciones simples da

$$X_2(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

Que al aplicar la transformada inversa de Laplace, da la respuesta

$$x_2(t) = \cos(t) + \cos(2t)$$

Sustituyendo para $x_2(t)$ en la expresión $2\ddot{x}_2 + 4x_2 + 2x_1 = 0$ obtenemos $x_1(t) = 2x_2(t) + \ddot{x}_2(t) = 2\cos(t) + 2\cos(2t) - \cos(t) - 4\cos(2t)$ esto es,

$$x_1(t) = \cos(t) - 2\cos(2t)$$

Así las posiciones de las masas en el tiempo t son

$$x_1(t) = \cos(t) - 2\cos(2t)$$
$$x_2(t) = \cos(t) + \cos(2t)$$

IV. CONCLUSIÓN

Podemos concluir que la transformada de Laplace nos provee entre otras cosas un excelente herramienta para resolver ecuaciones diferenciales y así interpretar distintos problemas en distintas áreas de estudio como la física, química, matemática, entre otros.

REFERENCIAS

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, pp 97-200, 2002.
[2] Calandrini, Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja. pp 48-53, 2013.
[3] http://prezi.com/nlwkcv3x-t7f/desarrollo-de-masa-resorte-con-transformada-de-laplace/