Uso de la Transformada de Laplace para resolver circuitos RLC

Facundo Nahuel Rezzuti

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
facurezzu@yahoo.com.ar
Julio 2013

Resumen: En este articulo se mostrara el uso de la Transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales, en particular se analizara la aplicación directa en la resolución de circuitos del tipo RLC, necesarios para casi todos los componentes electrónicos y eléctricos actuales.

Palabras clave: *ecuaciones diferenciales, Transformada de Laplace, circuitos RLC*

I. INTRODUCCIÓN

En el presente documento se mostrara como la Transformada de Laplace es útil a la hora de resolver ecuaciones diferenciales, en particular, a aquellas que surgen de plantearlas ecuaciones de un circuito eléctrico compuesto por **resistencias**, **capacitores** e **inductores**, regidos por las leyes de *Kirchhoff,* los cuales aparecen en cualquier circuito utilizado hoy en día.

II. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Como dijimos, los circuitos eléctricos pasivos constan de tres elementos:

a) Resistencias

Se denomina resistor o bien resistencia (Figura 1) al componente electrónico diseñado para introducir una resistencia eléctrica determinada entre dos puntos de un circuito eléctrico, es decir que se opone a la circulación de corriente. Su resistencia (R) se mide en Ohms (Ω).

Figura 1: Representación esquemática de un resistor o resistencia

b) Capacitores

Un condensador o capacitor (Figura 2) es un dispositivo utilizado en electricidad y electrónica, capaz de almacenar energía sustentando un campo eléctrico, formada por dos superficies conductoras en forma de laminas o placas separados por el espacio libre o por un medio dieléctrico, que posee una capacitancia (C) mediada en Faradios (F). Los capacitores pueden conducir corriente continua durante sólo un instante (por lo cual podemos decir que los capacitores, para las señales continuas, es como un cortocircuito), aunque funcionan bien como conductores en circuitos de corriente alterna. Es por esta propiedad lo convierte en dispositivos muy útiles cuando se debe impedir que la corriente continua entre a determinada parte de un circuito eléctrico, pero si queremos que pase la alterna.

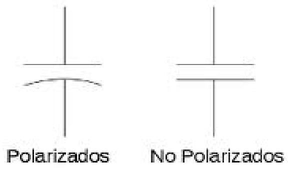


Figura 2: Representación esquemática de un capacitor

c) Inductancias

Un inductor o bobina (Figura 3) es un componente pasivo de un circuito eléctrico que, debido al fenómeno de la autoinducción, almacena energía en forma de campo magnético, cuya inductancia (L) se mide en Henrys (H). Al circular corriente por un inductor, este producirá un campo magnético que se opondrá a la variación de corriente que circule a través del mismo.

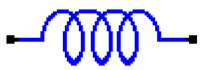


Figura 3: Representación esquemática de un inductor

Además de los componentes mencionados, se tienen parámetros como la corriente *i(t)* (medida en ampere) y el voltaje *v(t)* (medido volts). El fuljo de corriente en el circuito está relacionado con la carga *q(t)* (medida en coulombs C) mediante al relación

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Las relaciones entre el flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje *v(t)* a través de estos elementos en el tiempo *t* son:

- Caída de voltaje a través de la resistencia = Ri (Ley de Ohm)

- Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{c}\int i\, dt = \frac{q}{c}$

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito eléctrc está determinada por las **leyes de Kirchhoff:**

Ley 1
La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.

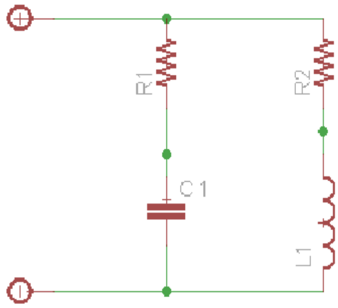
Ley 2
La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.

El uso de estas leyes nos lleva a las ecuaciones de circuito, las cuales pueden ser analizadas usando las técnicas de transformada de Laplace. 38.231.603

III. Resolución de circuito RLC – ejemplo y aplicación de Laplace

Ahora ya podemos determinar las ecuaciones diferenciales del circuito y empezar a resolver aplicando Transformada de Laplace, la idea es determinar las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ siendo $i_1(t)$ la que circula por la resistencia R_1 e $i_2(t)$ la que circula por la resistencia R_2, siendo $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$, $v(0) = 0$, $v(t)= V_0 \cos(t)$.

También tenemos como dato que: V_0=5v, R_1=R_2= 1Ω, C= 0,5 F , L= 2H.



Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito obtenemos:

$$v(t) = i_1(t)R_1 + \frac{1}{C}\int i_1(t)\,dt$$
$$v(t) = i_2(t)R_2 + L\frac{di_2}{dt}$$

Aplicamos transformada de Laplace a ambas ecuaciones:

$$\frac{V_0 s}{s^2+1} = R_1 I_1(s) + I_1(s)\frac{1}{sC}$$

$$\frac{V_0 s}{s^2+1} = R_2 I_2(s) + LsI_2(s)$$

Despejando las corrientes de cada ecuación y sumándolas ($I_t = I_1 + I_2$) obtenemos:

$$I_t(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

$$I_t(s) = \frac{V_0 s}{s^2+1} \times \frac{s}{s+\frac{1}{R_1 C}} \times \frac{1}{R_1} + \frac{V_0 s}{s^2+1} \times \frac{s}{s+\frac{R_2}{L}} \times \frac{1}{L}$$

Reemplazamos los valores que son dato:

$$I_t(s) = \frac{5s}{s^2+1} \times \frac{s}{s^2+2} + \frac{5s}{s^2+1} \times \frac{s}{s+2} \times 2$$

$$I_t(s) = \frac{5s^2}{(s^2+1)(s^2+2)} + \frac{10s^2}{(s^2+1)(s+2)}$$

Expresándolo en fracciones simples:

$$I_t(s) = \frac{-{}^5\!/_2\, i}{s+i} + \frac{{}^5\!/_2\, i}{s-i} + \frac{{}^5\!/_3\, i}{s+2i} + \frac{-{}^5\!/_3\, i}{s-2i} + \frac{-1+2i}{s+i} + \frac{-1-2i}{s-i} + \frac{8}{s+2}$$

Ahora antitransformamos:

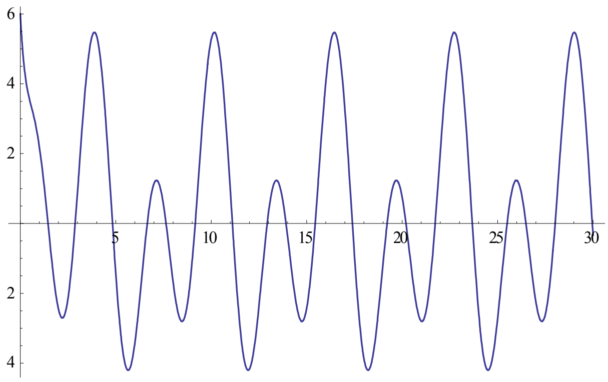
$$i_t(t) = -\frac{5}{2}ie^{-it} + \frac{5}{2}ie^{it} + \frac{5}{3}ie^{-2it} - \frac{5}{3}ie^{2it} + (-1+2i)e^{-it} + (-1-2i)e^{it} + 8e^{-2t}$$

Trabajando los términos con la forma exponencial de las funciones trigonométricas se llega a:

$$i_t(t) = -5sen(t) + \frac{10}{3}sen(2t) + 4sen(t) - 2\cos(t) + 8e^{-2t}$$

$$i_t(t) = -sen(t) - 2\cos(t) + \frac{10}{3}sen(2t) + 8e^{-2t}$$

Cuya representación gráfica en un par de ejes x-y es:



IV. CONCLUSIONES

Como pudimos observar, la Transformada de Laplace ofrece una forma rápida, sencilla y metódica de resolver distintos tipos de circuitos eléctricos.

REFERENCIAS

[1] R. Bellamn, y W. Karush, "On a new functional transform in analysis: the maximum transform", *Bull. AMS*, vol. 67, pp.501-503, 1961.

[2] G. Calandrini y A. Desages, "Observabilidad Algebraica", en *Séptima Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control* (*RPIC'97*), 17 al 19 de Setiembre de 1997, San Juan, Argentina, vol 2, pp. 821-826.

[3] J. F. Fuller, E. F. Fuchs, y K. J. Roesler, "Influence of harmonics on power distribution system protection," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 3, no.2, pp. 549-557, abr. 1988.

[4] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.

[5] L. Korda, "The Making of a Traslator", *Translation Journal*, [en línea], vol. 5, no. 3, jul. 2001, disponible en http://accurapid.com/journal/17prof.htm, [consultada el 21 de agosto de 2001].

[6] J. I. Pérez y M. Rivier, "Los sistemas de energía eléctrica", en *Análisis y operación de los sistemas de energía eléctrica*, cap. 1, A. Gómez, Ed. Madrid, McGraw-Hill, 2002.

[7] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 11 de julio de 2013].