Transformada Z en el diseño de filtros digitales

Fabio Kloster

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
fabio.kloster@gmail.com
Septiembre 2011

Resumen: En este informe se dará a conocer una de las aplicaciones de la Transformada Z. Se explicará cómo este tipo de transformada se aplica al diseño de filtros digitales.

I. INTRODUCCIÓN

Un desarrollo importante en muchas áreas de la ingeniería moderna es el reemplazo de dispositivos analógicos por digitales. Antes de adentrarnos en el desarrollo del trabajo creo que sería importante definir algunos conceptos con el fin de que se haga más fácil la comprensión del artículo. Un sistema de control está definido como un conjunto de componentes que pueden regular su propia conducta o la de otro sistema con el fin de lograr un funcionamiento predeterminado, de modo que se reduzcan las probabilidades de fallos y se obtengan los resultados buscados.

Hay muchos tipos de sistemas de control, pero en este artículo en particular se tratarán los sistemas de procesamiento digital o de tiempo discreto, conocidos así, si el sistema está definido por una ecuación a diferencias. El tiempo se considera dividido en períodos de valor constante, los valores de las variables son digitales, y su valor solo se conoce en cada período.

II. FILTROS ANALÓGICOS

Los filtros son de gran importancia en la mayoría de las aplicaciones de procesamiento de señales. Estos tienen el efecto de cambiar el espectro de señales de entrada, esto es, las componentes atenuantes de señales por una cantidad que depende de la frecuencia de la componente. Por ejemplo, un filtro ideal de paso bajo analógico pasa sin atenuación todas las componentes de la señal a frecuencias menores que la frecuencia crítica $\omega = \omega c$. La amplitud de la frecuencia de respuesta $|G(j\omega)|$ de tal filtro se muestra en la figura 1.

Una clase de filtros analógicos cuya frecuencia de respuesta aproxima aquella del filtro ideal de paso bajo comprende aquellos conocidos como los filtros de Butterworth. Además de tener características buenas, estos pueden implementarse usando una red como la ilustrada en la figura 2 para un filtro de segundo orden.

Se puede probar que la función de transferencia Gn(s) del filtro de orden n es

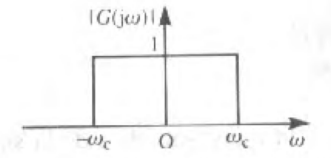

Figura 1 Respuesta de amplitud para un filtro ideal de paso bajo

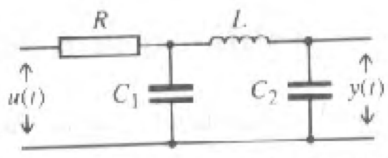

Figura 2 Red RLC para implementar un filtro de Butterworth de segundo

$$G_n(s) = \frac{1}{B_n(x)} \quad \text{donde} \quad B_n(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

con

$$x = \frac{s}{\omega_c},\ a_k = \prod_{r=1}^{k} \frac{\cos(r-1)\alpha}{sen(r\alpha)},\ \alpha = \frac{\pi}{2n}$$

Usando estas relaciones, se prueba que

$$G_2(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2+\omega_c^2+\sqrt[2]{2\omega_c s}} \tag{1}$$

$$G_3(s) = \frac{\omega_c^3}{s^3+2\omega_c s^2+2\omega_c^2 s+\omega_c^3} \tag{2}$$

Y así sucesivamente. Haciendo una gráfica de las amplitudes de las frecuencias de respuesta Gn(jω), se ve claramente que al incrementar n se mejora la aproximación de respuesta del filtro ideal de paso bajo de la figura 1.

III. Diseño de un filtro digital de reemplazo

Supongamos que ahora queremos diseñar un sistema de tiempo discreto que funcione en muestreos tomados de una señal de entrada, esto funcionará de manera similar al filtro de Butterworth. Supondremos que la señal de entrada u(t) y la señal de salida y(t) de un filtro analógico son muestreadas ambas en los mismos intervalos T para generar la sucesión de entrada {u(kT)} y la sucesión de salida {y(kT)} respectivamente. Es claro que necesitamos especificar qué significa "funciona de manera similar". En este caso, elegiremos como nuestra estrategia de diseño un método que aparee la sucesión de respuesta al impulso del diseño digital con una sucesión de muestreo, elegida en los instantes apropiados T de la respuesta al impulso de un "prototipo" analógico.

Seleccionamos como nuestro prototipo el filtro de primer orden con frecuencia de corte ω_c. El primer paso es calcular la respuesta al impulso de este filtro. La función de transferencia de Laplace del filtro es

$$G(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

Así, la respuesta al impulso se obtiene como

$$h(t) = \omega_c e^{-\omega_c T} \qquad (t \geq 0) \tag{3}$$

Después, hacemos el muestreo de esta respuesta a intervalos T para generar la sucesión

$$\{h(kT)\} = \{\omega_c e^{-\omega_c kT}\}$$

La cual, aplicando la transformada Z da

$$Z\{h(kT)\} = H(z) = \omega_c \frac{z}{z - e^{-\omega_c T}} U(z)$$

Finalmente, elegimos H(z) como la función de transferencia de nuestro sistema digital. Esto significa simplemente que la relación entrada-salida para el diseño del sistema digital será

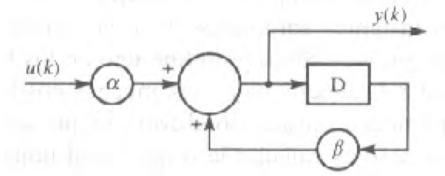

Figura 3 Diagrama de bloques para el filtro de reemplazo digital $\alpha = k\omega_c$, $\beta = e^{-\omega_c t}$.

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

Donde Y(z) y U(z) son las transformadas z de las sucesiones de entrada y salida $\{y(kT)\}$ y $\{u(kT)\}$ respectivamente. Así, tenemos

$$Y(z) = \omega_c \frac{z}{z - e^{-\omega_c T}} U(z) \quad \textbf{(4)}$$

Ahora está definido nuestro sistema digital y podemos construir fácilmente el modelo de ecuación en diferencias para el sistema como

$$(z - e^{-\omega_c T})Y(z) = \omega_c z U(z)$$

esto es

$$zY(z) - e^{-\omega_c T}Y(z) = \omega_c z U(z)$$

Bajo el supuesto de condiciones iniciales cero, podemos tomar las transformadas inversas para obtener el modelo de ecuación en diferencias de primer orden

$$y(k+1) - e^{-\omega_c T}y(k) = \omega_c u(k+1) \quad \textbf{(5)}$$

En la figura 3 se muestra la elaboración de un diagrama de bloque de (5).

IV. Conclusiones

El método de diseño considerado es llamado de invarianza al impulso y es sólo una de muchas técnicas posibles. Utilizando la respuesta impulsiva de filtros analógicos y la transformada Zeta se llega a la ecuación a diferencias que modela el filtro digital.

Referencias

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.