# Transformada de Laplace en filtros analógicos

Ezequiel M. Lobato

*Estudiante de Ingeniería Electrónica*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*zequilobato@gmail.com*
Julio 2011

*Resumen*: Se pretende explicar de manera simple como aplicar contenidos de la teoría dictada en la materia Funciones de Variable Compleja. Más específicamente el tema de la transformada de Laplace, aplicada a filtros analógicos de pasa bajos estos filtros permiten pasar una señal a frecuencias bajas, rechazando el paso de las frecuencias altas.

*Palabras clave*: Filtros pasa-bajos, filtros analógicos, transformada de Laplace.

## I. INTRODUCCIÓN

Los métodos de la transformada de Laplace tienen un papel clave en el enfoque moderno al análisis y diseño en los sistemas de ingeniería. El incentivo para el desarrollo de estos métodos fue el trabajo del ingeniero electricista Oliver Heaviside que desarrolló un método para la solución sistemática de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Heaviside estuvo interesado en la resolución de problemas prácticos y su método fue basado principalmente en la intuición, faltándole fundamentos matemáticos, motivo por el cual fue criticado por los teóricos de su tiempo.

Debido a que trabajó en la práctica, el método de Heaviside fue de gran aceptación por parte de los ingenieros, para la resolución de gran cantidad de problemas, el método atrajo la atención de los matemáticos, quienes se encargaron de justificarlo. La investigación del problema continuó por muchos años antes de que finalmente fuera reconocida la transformación integral desarrollada por el matemático Pierre Simon de Laplace casi un siglo antes proporcionaba los fundamentos teóricos del trabajo de Heaviside también fue reconocido que el uso de esta transformación integral proporcionaba una alternativa más sistemática para la solución de ecuaciones diferenciales que el método que había propuesto Heaviside. Es este el tratamiento alternativo del tema la base del método de la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil en electrónica ya que gracias a ella el comportamiento de sistemas electrónicos complejos puede describirse usando ecuaciones ordinarias en lugar de ecuaciones diferenciales. El propósito de utilizar una transformación es generar un nuevo dominio en el cual sea más fácil manipular el problema a ser investigado, para luego anti-transformarlo para llegar a los resultados deseados en el dominio original. El ámbito de aplicación de esta transformada no queda reducido a los sistemas electrónicos. El comportamiento de cualquier sistema lineal, sea del tipo que sea, queda completamente descrito mediante las ecuaciones ordinarias obtenidas a través de la transformada de Laplace.

La transformación propiamente dicha es la siguiente:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_o^\infty e^{-st} \cdot x(t)dt \tag{1}$$

donde $X(s)$es la transformada de Laplace de $x(t)$. Esta función se define para cualquier número complejo, s.

Los circuitos eléctricos pasivos son construidos con tres elementos básicos: resistores, capacitores e inductores, con las variables asociadas corriente $i(t)$ y voltaje $v(t)$. Convencionalmente los mencionados elementos se representan simbólicamente como en la figura 1.

## II. COMPORTAMIENTO DE UN FILTRO RC.

Para conocer el comportamiento de un capacitor en un filtro, primero debemos conocer cómo se comporta este ante distintas frecuencias. Una vez conocido esto procederemos a analizar un filtro resistencia-capacitor en serie (RC).

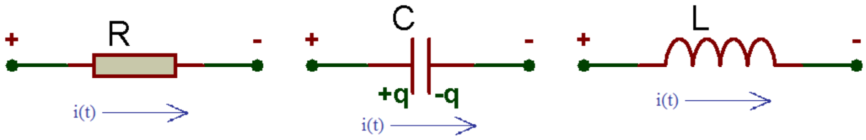


Figura 1: (a) Resistor; (b) Capacitor; (c) Inductor

### A. *Impedancia de un capacitor*

Sabemos que en un condensador el voltaje entre sus placas es proporcional a la carga almacenada e inversamente proporcional a su capacidad. Además podemos expresar la carga como la integral de la corriente que circula por el condensador a lo largo del tiempo, de modo que obtenemos:

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C}; \;\; v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \tag{2}$$

Donde $v_c(t)$es la tensión entre los bornes del capacitor; $q(t)$ la carga contenida en el capacitor; $C$ la capacidad y $i(t)$ la corriente que circula por el capacitor.

Aplicamos la trasformada de Laplace a ambos lados de (2) utilizando las propiedades vistas durante el cursado de la materia nos queda:

$$V_c(s) = \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} \tag{3}$$

Donde $V_c(s)$ es la transformada de $v_c(t)$ y $\frac{I(s)}{s}$ la transformada de $\int i(t)dt$.

Conociendo que la expresión de la impedancia es $Z = \frac{V}{I}$ donde $Z$ es la impedancia, $V$ la tensión e $I$ la corriente, nos queda que el capacitor tiene una impedancia de:

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{C \cdot s} \tag{4}$$

En el dominio de la transformada de Laplace la impedancia del condensador es ${}^{1}/_{Cs}$. Para ver como depende la impedancia del condensador con la frecuencia sustituimos $s$ por $j\omega$ en (4) y obtenemos:

$$Z(\omega) = \frac{1}{C \cdot j \cdot \omega} \tag{5}$$

Donde $\omega$ es la frecuencia de la tensión; $C$ la capacidad y $j$ la unidad imaginaria, reemplaza la $i$ convencional ya que esta haría engorrosos los cálculos al confundirse con la corriente.

### B. *Filtro RC*

En la figura 2 podemos observar un filtro RC de primer orden. Vamos a analizar este circuito en busca de su función de transferencia, esto es la ecuación que relaciona el voltaje de salida con el voltaje de entrada. La tensión $v_{out}$ es el voltaje del condensador. Para calcular la función transferencia comenzaremos calculando la corriente que circula. Sabiendo que la impedancia de la resistencia es R tenemos que:

$$v_{in}(t) = i(t) \cdot R + \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{6}$$

Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros nos queda:

$$V_{in}(s) = I(s) \cdot R + \frac{I(s)}{C \cdot s} = I(s) \cdot \left(R + \frac{1}{C \cdot s}\right)$$

$$I(s) = \frac{V_{in}(s)}{\left(R + \frac{1}{C \cdot s}\right)} \tag{7}$$

Conociendo $I(s)$ podemos calcular con (3) el voltaje sobre el condensador.

$$V_c(s) = \frac{\frac{V_{in}(s)}{\left(R + \frac{1}{C \cdot s}\right)}}{C \cdot s} = \frac{V_{in}(s)}{R \cdot C \cdot s + 1} \tag{8}$$

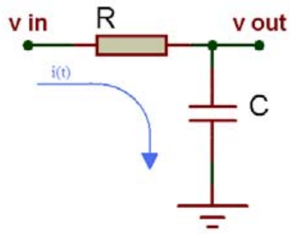


Figura 2: Filtro RC de primer orden

Como mencionamos anteriormente la función transferencia es la relación entre $V_{out}(s)$ y $V_{in}(s)$; como $V_{out}(s) = V_C(s)$, la función transferencia queda:

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \tag{9}$$

La respuesta en frecuencia se obtiene sustituyendo $s$ por $j\omega$ en su función de transferencia, $H(s)$. El resultado es un valor complejo que se puede descomponer en una magnitud y una fase (la magnitud muy habitualmente expresada en decibelios: $dB(|H(j\omega)|) = 20\log_{10}|H(j\omega)|$):

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2}} \tag{10}$$

$$\varphi\big(H(j\omega)\big) = -\arctan\,(R \cdot C \cdot \omega) \tag{11}$$

*C. Atenuación del filtro*

De la ecuación (10) podemos observar que para frecuencias bajas, la magnitud de la función transferencia vale aproximadamente 1, lo que nos hace intuir, de manera correcta, que la señal de salida no es afectada en gran parte por el filtro, y a medida que aumentamos la frecuencia de la señal de entrada, la magnitud de la función transferencia comienza a disminuir de manera inversamente proporcional a la frecuencia, depende de la función que se le desea dar al filtro será el límite al cual se considera el corte el filtro, en el caso de su utilización para ecualizadores de audio, una atenuación mayor a 0,7 se considera aceptable.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

Esta atenuación se da para una frecuencia de $\omega = 1/(R \cdot C)$. La cual si es superada el filtro más atenuará la señal. Por otro lado de (11) se puede calcular que para una frecuencia a la cual se produce que la función transferencia de 0,7, calculada en (12), la señal posee un retraso de 45º respecto de la señal de entrada.

## III. CONCLUSIONES

Como conclusión podemos decir que la transformada de Laplace simplifica los cálculos, ya que al momento de que uno observa la integral de la transformación piensa que solo hará engorrosas las cuentas, pero debido a sus propiedades y las existentes tablas de transformación la hace una herramienta muy cómoda a la hora de tener que trabajar con ecuaciones diferenciales y/o integrales.

## REFERENCIAS

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson educación, Mexico 2002 Segunda edición disponible en biblioteca central de la Universidad Nacional del Sur. Páginas 97 a 99 y 130 a 131.
[2] Anónimo, transf_laplace.pdf, [en línea], disponible en http://www.ele.uva.es/~jesus/eanalogica/transf_laplace.pdf Paginas 1 y 2, [acceso el 12 de Julio de 2011].
[3] Federico Miyara, filtros-t, [en línea] disponible en http://es.scribd.com/doc/58009036/Filtros-Activos Páginas 10 a 20, [acceso el 12 de julio de 2011].