Teorema de Fourier – Matemáticas de la música

Plaza Esteban

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
11tete11@gmail.com

Diciembre 2015

Resumen: El objetivo de este trabajo es mostrar a personas relacionadas con la música una de las herramientas más importantes con que cuenta la tecnología musical de hoy que es el análisis de las señales acústicas.

Actualmente estas técnicas se encuentran al alcance de cualquier persona dedicada a la actividad musical y podría decirse que marcan la continuidad histórica en la relación con los sonidos, se trata de aplicar el análisis espectral a las señales acústicas con el fin de extraer información útil. De todas las operaciones de transformación, sobresale sin duda la Transformada de Fourier. Su aplicación en el campo de la música permite comprender muchos fenómenos básicos y habilita la creación de nuevos procesos y técnicas para la producción de señales acústicas.

Palabras clave: Transformada de Fourier, análisis de señales acústicas, análisis armónico, curva de sonido.

I. INTRODUCCIÓN

Los objetos al vibrar excitan la masa de aire que los rodea y generan una perturbación que viaja por el aire propagándose en forma de onda. Al llegar al oído humano esta onda pone en vibración ciertas estructuras anatómicas que desencadenan respuestas neurológicas y psicológicas implicadas en la percepción del sonido.

En este proceso de generación, propagación y recepción se pone en juego una gran cantidad de energía que puede representarse mediante una función del tiempo llamada señal acústica que puede ser estudiada mediante herramientas matemáticas muy potentes, entre las que se destaca el análisis de Fourier.

II. SEÑALES ACÚSTICAS

Una señal acústica es un conjunto de valores representativo del comportamiento de un fenómeno.

De las numerosas señales acústicas que somos capaces de percibir, podemos destacar en principio dos grandes grupos: las *estacionarias* que permanecen estables a lo largo del tiempo y las *no estacionarias*.

Estas señales, se pueden presentar de dos maneras diferentes: con el tiempo definido en forma continua, o con el tiempo definido sólo en algunos instantes. En el presente trabajo se aplicará el análisis de Fourier a señales de tiempo continuo.

III. SEÑALES SINUSOIDALES

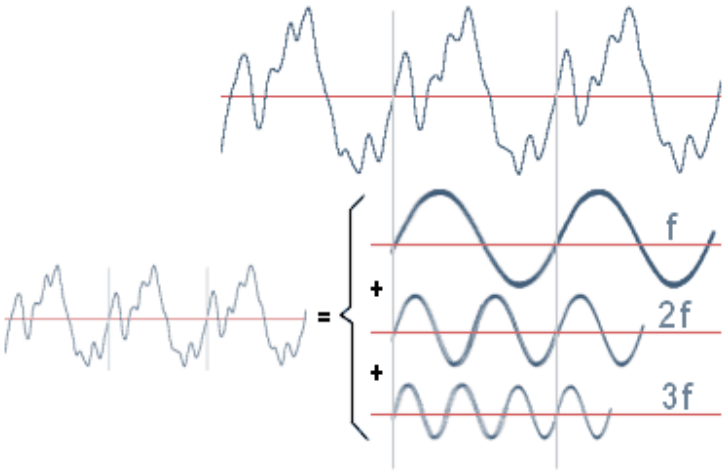
Existe un tipo especial de onda periódica llamada *onda sinusoidal* que ocupa u lugar destacado por su sencillez y utilidad.

Se hace necesario recordar algunas propiedades de las sinusoides:

- Si dos señales sinusoidales tienen la misma frecuencia la suma es otra sinusoidal de la misma frecuencia aunque cambia la amplitud.
- Si las sinusoides que se suman no poseen la misma frecuencia, la señal resultante ya no será sinusoidal y hasta puede no ser periódica
- Si se superponen señales sinusoidales de frecuencias cercanas, aparecen variaciones en la amplitud llamadas *pulsaciones*.

Cualquier forma de onda, a condición de que sea periódica (se repita siempre igual) se puede descomponer en una serie más o menos larga (quizás infinita) de ondas puras (sinusoidales) llamadas *armónicos*. Estos armónicos son tales que su

combinación o mezcla dan lugar de nuevo al sonido original, y sus frecuencias son múltiplos enteros de la del sonido fundamental.



IV. TEOREMA DE FOURIER

Toda función periódica puede reducirse de sinusoides, sin que importe el grado de complejidad que presenten, que es lo que establece el teorema de Fourier:

> Toda función periódica de período P puede descomponerse en una suma de sinusoides armónicas, de amplitudes y fases adecuadas, cuyo *primer armónico* [1]posea período P.

Así como este teorema permite descomponer y analizar cualquier función periódica, también habilita la posibilidad de construir señales periódicas complejas a partir de una suma de sinusoides puras. Se puede entonces, reescribir el teorema de la siguiente forma:

> Toda función periódica de período P puede construirse a partir de una suma de sinusoides cuyas frecuencias formen una serie armónica fundamental $f = 1/P$. Cada sinusoide debe poseer la adecuada amplitud y fase, que se determinará a partir de la función periódica a estudiar.

La disposición de las amplitudes, frecuencias y fases de las sinusoides involucradas en la suma se denomina *espectro de Fourier.*

El teorema establece que "puede descomponerse" o que "puede construirse" una función periódica cualquiera, lo cual no significa que resulte sencillo, sin embargo, en la actualidad existen numerosos programas de computación que los efectúan con gran eficiencia y que ponen directamente los resultados a disposición de cualquier persona que los necesite.

Aún sin realizar grandes esfuerzos matemáticos se pueden extraer algunas conclusiones que son de mucha utilidad:

Para comenzar el teorema establece que una función periódica posee un espectro armónico[2]. Si tenemos una señal periódica y conocemos su período sabemos inmediatamente:

1- Que el espectro correspondiente será armónico

2- Cuáles serán las frecuencias de cada uno de los armónicos

V. ANÁLISIS DE UNA CURVA DE SONIDO

Apliquemos el análisis de Fourier a un trozo de una curva de sonido.

El teorema nos dice que cualquier curva se puede reproducir mediante la superposición de armónicos simples escogidos adecuadamente. En consecuencia, cualquier sonido, por complejo que sea – desde la voz de un cantante hasta un colectivo

---

[1] Primera onda producida por una vibración

[2] Son las ondas senoidales que componen un sonido

cambiando de marcha-, se puede analizar descomponiéndolo en sus tonos puros y se puede reproducir exactamente con una fuente de sonidos puros (por ejemplo, un diapasón).

La curva de un sonido musical es periódica, se repite a intervalos perfectamente regulares. El teorema de Fourier nos dice que tal curva puede recomponerse con la superposición de curvas análogas simples tales como 1, 2, 3 u otro número entero de ondas que suceden en cada período de la curva original. Si por ejemplo la onda tiene una frecuencia de 100 se puede representar por la superposición de curvas armónicas simples de frecuencias 100, 200, 300, etc.

Cada una de esas curvas representa un sonido puro, de lo que deducimos que cualquier sonido musical de frecuencia 100 está formado por sonidos puros que tienen respectivamente 1,2,3, etc veces la frecuencia del sonido original. Estos tonos se denominan "armónicos naturales" de la nota en cuestión.

VI. ESCUCHAMOS MÚSICA EN STREAMING GRACIAS A FOURIER

Cuando se graba una canción en un estudio, **todas las frecuencias de la pista se conservan intactas en el disco**. Sin embargo, una canción así pesa demasiado como para transmitirse a través de la Red, y eso haría que el 'streaming' fuera tan aparatoso que en cuanto la conexión fallara mínimamente el sonido se cortaría.

La compresión del formato MP3 está basada en una variante de la transformación de Fourier, que es la Transformada de Fourier discreta.

Aplicándola a una canción, se divide la canción en su espectro de frecuencias utilizando Fourier.

Luego se divide el rango de frecuencias del sonido original en 32 bandas que el oído humano logra oír por separado. A estas se les aplica una Transformada de Fourier para conseguir otras 18 bandas de frecuencias por cada una, dando un total de 576 bandas de frecuencia individuales. Luego de cada una de estas se remueven los componentes que son indetectables por el oído humano. La señal resultante de este proceso es comprimido aún más mediante una codificación de Huffmann, una técnica que representa los valores de frecuencia más repetidos mediante un código más corto que el usado para aquellos valores de menor ocurrencia (por ejemplo, sería un desperdicio usar los 141120 bits de la señal muestreada para codificar 1/10 segundo de silencio en una canción) Esto permite que el archivo final sea mucho más pequeño ya que se requieren de menor cantidad de bits para almacenar las representaciones matemáticas creadas mediante el análisis de Fourier de la señal original.

El resultado es que la calidad del sonido apenas se ve malograda y de esta forma los archivos se pueden transmitir sin usar tanto ancho de banda. El formato que usa **Spotify**, se crea a partir de una versión computacional de la transformada de Fourier.

VII. CONCLUSIÓN

En el arte el saber necesita del saber hacer, y para saber hacer resulta esencial conocer el alcance, el ámbito de conveniencia y las limitaciones de cada una de las tecnologías: únicamente ese conocimiento permitirá a una persona transitar por su interior con libertad. El análisis espectral de las señales permite acercar a quienes se relacionan con la música una de las herramientas más importantes con que cuenta la tecnología musical hoy. En este sentido, la aplicación de Fourier al campo de la música le da versatilidad y utilidad a este análisis.

REFERENCIAS

[1] J. Newman, Sigma el Mundo de las Matemáticas, Volumen 6,Ediciones Grijalbo, pp 214-236

[2] Basso G, La transformada de Fourier en la Música, Colección Universitaria, Cap I, III y IV