Aplicación de la transformada de Laplace a vibraciones mecánicas

Emanuel Fernández
Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
ema.fernandeznovo@gmail.com

Agosto 2012

Resumen: La transformada de Laplace es una técnica matemática que forma parte de ciertas transformadas integrales tales como la transformada de Fourier y la transformada de Hilbert. El siguiente informe pretende desarrollar su uso en la resolución de ecuaciones diferenciales de movimiento en sistemas de traslación.

Palabras claves: Transformadas integrales, Laplace, ecuaciones diferenciales.

I. INTRODUCCIÓN

El proceso de resolución del cual se hará uso consta de tres pasos principales: En un principio, reducir el problema complejo de resolver una ecuación diferencial un sistema de ecuación diferenciales a resolver una ecuación algebraica o un sistema algebraico, el cual es más sencillo, utilizando la transformada de Laplace y sus propiedades. En una segunda instancia, resolver el problema manipulándolo algebraicamente y, por último, la solución al sistema algebraico es transformada en sentido inverso para obtener así la solución al problema dado.

En la mayoría de los casos, se obtiene una solución de la forma Y(s)=$\frac{P(s)}{Q(s)}$ donde P y Q son polinomios en s. Para resolverlos es utilizado el desarrollo de Heaviside, el cual indica expresar Y(s) en términos de fracciones simples y luego antitransformar dicha expresión.

El presente artículo tiene como objetivo demostrar que a transformada de Laplace es una poderosa herramienta aplicable a problemas de vibraciones mecánicas.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace ($\mathcal{L}$) se define como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Donde $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y existe para todo $s \in \mathbb{R}$ donde la integral converge.

La función original $f(t)$ se conoce como la transformada inversa o inversa de $F(s)$, es decir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Sea:

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad \forall s > p$$
$$g(t) \leftrightarrow G(s) \quad \forall s > q$$

Propiedad de linealidad: Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s) \quad \forall s \in max(p, q)$$

Propiedad de las derivadas:

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad Re(s) > p$$

III. VIBRACIONES MECÁNICAS

Los sistemas mecánicos de traslación pueden ser usados para modelar muchas situaciones e involucran tres elementos básicos: masas (en kilogramos), resortes (en newton por metro) y amortiguadores (en newton y segundo por metro). Las variables asociadas son el desplazamiento x(t) (medido en metros) y la fuerza F(t) (en newton). La figura 1 es una representación de los tres elementos básicos nombrados anteriormente.

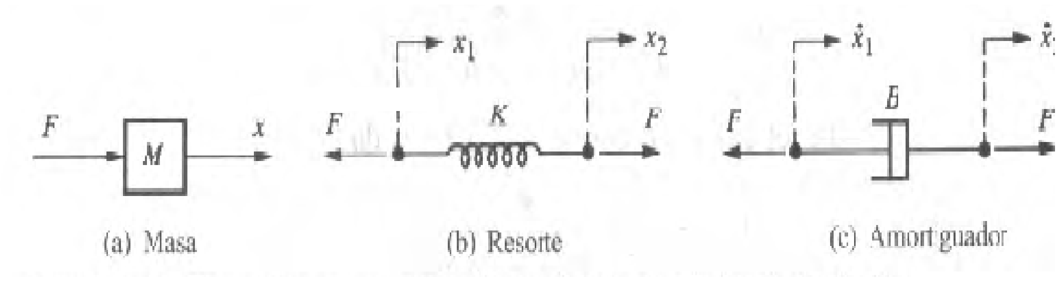

Figura 1: Elementos componentes de un sistema mecánico de traslación.

Considerando que los problemas tratados incluyen resortes y amortiguadores ideales (esto es, que se comportan linealmente), las ecuaciones de fuerza y desplazamiento utilizadas son:

Masa: $F = M(\frac{d^2}{dt^2}x) = M\ddot{x}$ (Ley de Newton)
Resorte: $F = K(x_2 - x_1)$ (Ley de Hooke)
Amortiguador: $F = B\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) = B(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$
Donde M es la masa, K es la rigidez del resorte y B es el coeficiente de amortiguamiento.

IV. EJEMPLO

El sistema mecánico de la figura 2(a) consiste en dos masas $M_1 = 1$ y $M_2 = 2$, cada una atada a una base fija por un resorte, con constante $K_1 = 1$ y $K_3 = 2$ respectivamente, y atadas entre sí por un tercer resorte con constante $K_2 = 2$. El sistema es soltado desde el reposo en el tiempo $t = 0$ en una posición en la cual M_1 esta desplazada una unidad a la izquierda de su posición de equilibrio y M_2 esta desplazada dos unidades a la derecha de su posición de equilibrio. Despreciando todos los efectos de fricción, el objetivo será determinar las posiciones de las masas en el tiempo t.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos de las masas M_1 y M_2 respectivamente desde sus posiciones de equilibrio. Como todos los efectos de fricción son despreciados, las únicas fuerzas que actúan sobre las masas son las fuerzas de restauración debidas a los resortes, como muestra la figura 2(b). Aplicando la segunda ley de Newton a M_1 y M_2 respectivamente, se obtiene

$$M_1\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 = K_2(x_2 - x_1) - K_1x_1$$
$$M_2x_2 = -F_3 - F_2 = -K_3x_2 - K_2(x_2 - x_1)$$

que, sustituyendo los valores dados para M_1, M_2, K_1, K_2 y K_3, dan

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 0 \qquad (1)$$
$$2\ddot{x}_2 + 4x_2 - 2x_1 = 0 \qquad (2)$$

Aplicando la transformada de Laplace se llega a las ecuaciones

$$(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = sx_1(0) + \dot{x}_1(0)$$
$$-X_1(s) + (s^2 + 2)X_2(s) = sx_2(0) + \dot{x}_2(0)$$

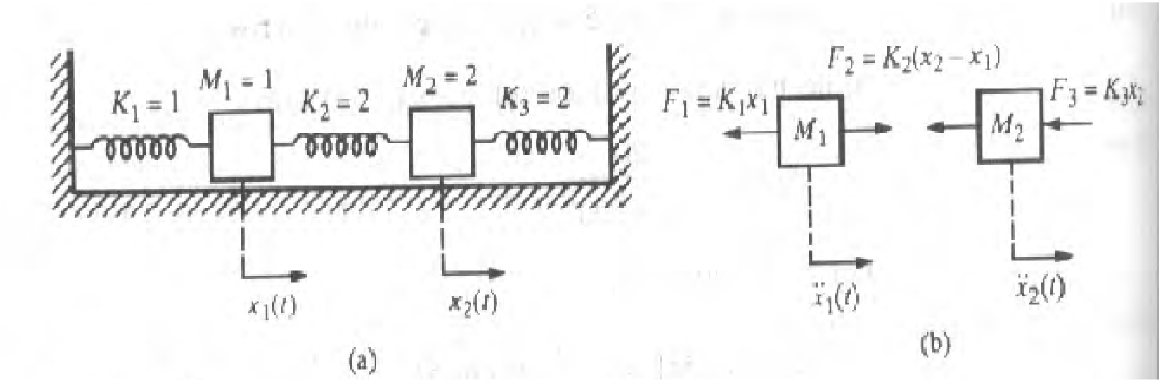

Figura 2: Sistema de dos masas del ejemplo.

Como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ denotan desplazamientos hacia la derecha de las posiciones de equilibrio y debido a que el sistema es soltado desde el reposo, las condiciones iníciales son $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 2$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Incorporándolas, las ecuaciones transformadas son

$$(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = -s \qquad (3)$$
$$-X_1(s) + (s^2 + 2)X_2(s) = 2s \qquad (4)$$

De aquí

$$X_2(s) = \frac{2s^3 + 5s}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}$$

Resolviendo en fracciones parciales resulta

$$X_2(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+1} \qquad (5)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace en (5) se obtiene

$$x_2(t) = \cos t + \cos 2t \qquad (6)$$

Sustituyendo para $x_2(t)$ en (2) da como resultado

$$x_1(t) = 2x_2(t) + 2\dot{x}_2(t) = 2\cos t + 2\cos 2t - \cos t - \cos 4t$$

Esto es

$$x_1(t) = \cos t - 2\cos 2t \qquad (7)$$

Así las posiciones de las masas en el tiempo t son

$$x_1(t) = \cos t - 2\cos 2t$$
$$x_2(t) = \cos t + \cos 2t$$

V. Leyes utilizadas

Ley 1: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime (segunda ley de Newton o ley de fuerza).

Ley 2: La cantidad de estiramiento o de compresión (cambio de longitud), es directamente proporcional a la fuerza aplicada (ley de Hooke).

VI. CONCLUSIÓN

En resumen, quedo demostrado que las transformadas de Laplace proveen, gracias a sus propiedades, un método sencillo y mecánico para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, las cuales se encuentran en problemas de varias ramas de la ciencia.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 1er. Cuatrimestre 2011, pp. 57-64, 2011.

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, pp. 135-139.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre,* [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_elasticidad_de_Hooke [acceso el 15 de agosto de 2012].

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre,* [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Newton [acceso el 15 de agosto de 2012].