Transformada de Laplace aplicada en filtros analógicos

Emanuel Córdoba

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Ema_28_07@hotmail.com
Marzo de 2015

Resumen: La transformada de Laplace permite describir el comportamiento de sistemas dinámicos complejos utilizando ecuaciones ordinarias en lugar de ecuaciones diferenciales. El propósito de utilizar una transformación es generar un nuevo dominio en el cual sea más fácil manipular el problema a ser investigado, para luego anti-transformarlo y así llegar a los resultados deseados en el dominio original. En este trabajo se presentará la aplicación de ésta herramienta aplicada a filtros analógicos pasa bajos, los cuales no permiten el paso de las altas frecuencias.

Palabras clave: Transformada de Laplace, filtros analógicos, filtros pasa-bajos.

I. INTRODUCCIÓN

Todo comenzó cuando el ingeniero electricista Oliver Heavside estuvo interesado en la resolución de problemas prácticos y basándose en su intuición comenzó a desarrollar un método para la solución sistemática de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Finalmente a mediados del siglo XIX publicó sus resultados, cuya utilidad a la hora de resolver ecuaciones de la física y la ingeniería hizo que pronto se extendieran. Sin embargo, el trabajo de Heaviside, formal y poco riguroso, atrajo las críticas de algunos matemáticos puristas que los rechazaron argumentando que los resultados no podían surgir de tal forma. No obstante, el éxito del método hizo que pronto fuera adoptado por ingenieros y físicos de todo el mundo, de manera que al final atrajo la atención de cierto número de matemáticos tratando de justificar el método de forma rigurosa. Tras varias décadas de intentos, se descubrió que la Transformada descubierta por Pierre Simon Laplace hacía un siglo no sólo ofrecía un fundamento teórico al método de cálculo operacional de Heaviside, sino que además ofrecía una alternativa mucho más sistemática a tales métodos.

Hacia principios del siglo XX, la transformada de Laplace se convirtió en una herramienta común de la teoría de vibraciones y de la teoría de circuitos, dos de los campos donde ha sido aplicada con más éxito. En general, la transformada es adecuada para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en el origen. Una de sus ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división. Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, mucho más fáciles de resolver.

La transformación presentada con anterioridad es la siguiente:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

Siendo $F(s)$ la tranformada de Laplace de $f(t)$. La misma es definida para cualquier número complejo *s*.

II. COMPORTAMIENTO DE UN FILTRO PASA BAJOS RC.

Para poder comprender el funcionamiento del sistema completo primero debemos definir como están compuestos estos filtros en particular, los cuales están conformados por elementos pasivos. En el caso puntual de un filtro pasa bajos será necesario utilizar un resistor y un capacitor. Teniendo asociadas las variables $i(t)$ y $v(t)$ siendo la corriente y la diferencia de potencial respectivamente.

Para analizar el comportamiento del mismo será necesario conocer cómo se comporta ante las diferentes frecuencias.

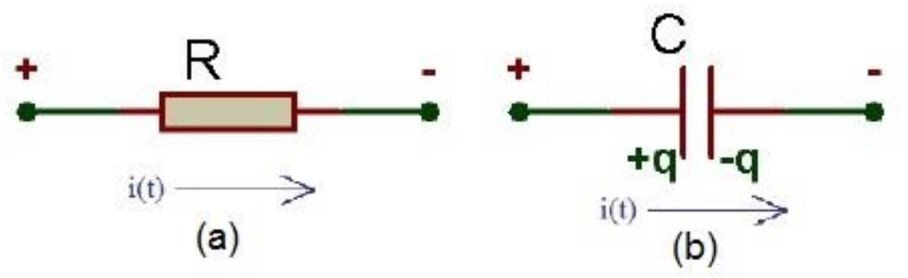

Figura (1): (a) Resistor; (b) Capacitor.

A. Impedancia de un capacitor

Se sabe de un capacitor que la diferencia de potencial entre sus placas es proporcional a la carga almacenada e inversamente proporcional a su capacidad. También sabemos que la variación de la carga respecto al tiempo es la corriente. Por lo tanto nos permite reescribir la ecuación de la siguiente forma reemplazando la carga por la integral de la corriente que circula por el capacitor a lo largo del tiempo:

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} \; ; \quad v_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\, dt \qquad (2)$$

Siendo $v_c(t)$ el voltaje entre los bornes del capacitor; $i(t)$ la corriente que circula por el capacitor; $q(t)$ la carga almacenada en el capacitor; C la capacitancia del mismo.

Si aplicamos la transformada de Laplace en ambos miembros de la igualdad (2) tenemos:

$$V_c(s) = \frac{1}{C} . \frac{I(s)}{S} \qquad (3)$$

Siendo $V_c(s)$ la transformada de $v_c(t)$ y $\frac{I(s)}{S}$ la transformada de $\int i(t)\, dt$.

La impedancia de un capacitor viene dada por la expresión:

$$Z_c(s) = \frac{\mathrm{V(s)}}{I(s)} = \frac{1}{C\, .\, S} \qquad (4)$$

De donde Z_c es la impedancia del capacitor, $V(s)$ es la tensión e $I(s)$ es la corriente. Para ver como la misma depende de la frecuencia realizamos la sustitución de S por $j\omega$ en (4) y se obtiene:

$$Z_c(\omega) = \frac{1}{C\, .\, S} = \frac{1}{j\, .\omega . C} \qquad (5)$$

Siendo j la unidad imaginaria la cual fue reemplazada por la i para evitar posible confusiones con la corriente; ω la frecuencia de la tensión y C la capacitancia del condensador.

B. Filtro Pasa Bajos RC

Vamos a analizar este circuito pasivo para encontrar su función de transferencia, la cual relaciona la tensión de entrada al circuito con la tensión de salida. Las cuales vamos a denominar como V_e y V_s respectivamente. Primero debemos obtener la corriente que circula por el circuito representado en la figura 2. Se sabe que la impedancia de la resistencia es simplemente R de lo cual tendremos la siguiente ecuación para la tensión de entrada:

$$V_e(t) = i(t).R + \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{6}$$

Se aplica la transformada de Laplace en ambos miembros para obtener:

$$V_e(s) = I(s).R + \frac{I(s)}{C.S} \tag{7}$$

$$I(s) = \frac{V_e(s)}{\left(R + \frac{1}{C.S}\right)}$$

Conociendo $I(s)$ es posible calcular con (3) la diferencia de potencial entre las placas del capacitor.

$$V_c(s) = \frac{\frac{V_e(s)}{\left(R+\frac{1}{C.S}\right)}}{C.S} = \frac{V_e(s)}{R.C.S+1} \tag{8}$$

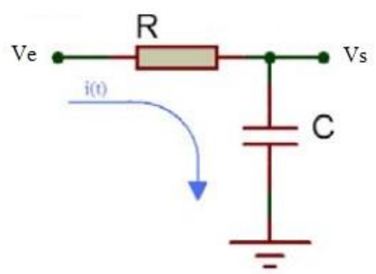

Figura 2: Filtro pasa bajos RC

Anteriormente se dijo que la función transferencia era la relación entre la tensión de entrada y la tensión de salida, es decir entre V_e y V_s respectivamente. Como $V_s(s) = V_c(s)$ la función transferencia quedará determinada de la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{R.C.S+1} \tag{9}$$

Si sustituimos S por $j\omega$ en (9). Obtenemos como resultado un número complejo el cual tendrá como modulo (10) y argumento (11):

$$Ganancia = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{C^2.R^2.\omega^2+1}} \tag{10}$$

$$Desfasamiento = Arg\big(H(\omega)\big) = -\tan^{-1}(C.R.\omega) \tag{11}$$

La expresión (10) es por lo general expresada también como la ganancia de amplitud en decibeles donde $dB|H(\omega)| = 20\log_{10}|H(\omega)|$.

C. *Atenuación de la Ganancia del filtro*

De la ecuación (10) se observa que para bajas frecuencias la amplitud no se ve prácticamente afectada, no siendo igual para altas frecuencias, ya que, a medida que aumentamos la frecuencia de la señal de entrada la ganancia disminuye de forma inversamente proporcional. Siendo aceptable una atenuación de la ganancia mayor a 0,7 dependiendo de la función que se le desea dar al filtro.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{C^2.R^2.\omega^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

Superando la frecuencia de corte del filtro la cual viene dada por una frecuencia de $\omega = \frac{1}{R.C}$,una vez superada dicha frecuencia la atenuación será aún mayor. También es importante destacar que si se produce una atenuación de la ganancia mayor a 0,7 la señal tendrá un retraso de 45° respecto a la señal ingresada en el filtro.

III. CONCLUSIÓN

Gracias a ésta poderosa herramienta aplicada se evitó trabajar con ecuaciones diferenciales de primer orden. Las cuales hubiesen hecho que los cálculos fueran muy engorrosos y complejos. Por lo tanto siempre que sea posible aplicar ésta transformación es una gran ventaja debido a sus tablas y propiedades disminuyen el tiempo de resolución de sistemas complejos llegando a los mismos resultados que en su dominio original.

REFERENCIAS

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki /Transformada_de_Laplace, [acceso el 12 de marzo de 2015].
[2] Anónimo, transf_laplace.pdf, [en línea], disponible en http://www.ele.uva.es/~jesus/eanalogica/transf_laplace.pdf Paginas 1 y 2, [acceso el 12 de marzo de 2015].
[3] Federico Miyara, filtros-t, [en línea] disponible en http://es.scribd.com/doc/58009036/Filtros-Activos Páginas 10 a 20, [acceso el 12 de marzo de 2015].
[4] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson educación, Edición Digital. Páginas 205 y 206.