Aplicación de Transformaciones Conformes: Temperaturas Estacionarias

Elio Rodrigo Cardozo

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
elio_burato@hotmail.es

Agosto 2012

Resumen: El método de la Transformación Conforme es utilizado en la solución de problemas de la física matemática llevados acabo por la ecuación de Laplace. A continuación veremos un ejemplo de Temperaturas Estacionarias resuelto con el método anterior dicho.

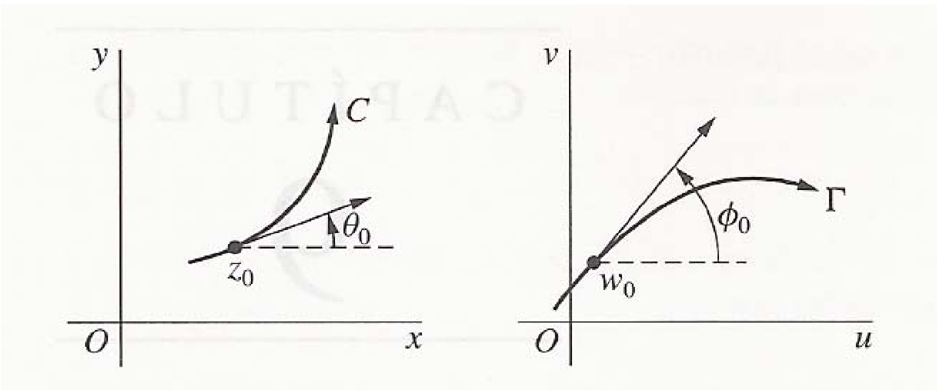
Palabras clave: Trasformada Conforme, ecuación de Laplace, temperaturas estacionarias.

I. INTRODUCCIÓN

Las Transformaciones Conformes se utilizan para resolver problemas físicos relacionados con la ecuación de Laplace, ya que constituye un método estándar para resolver problemas con valor en la frontera en la teoría bidimensional del potencial, al transformar una región complicada dada en otra más sencilla.

II. TRANSFORMACIONES CONFORMES

Las transformaciones conformes tienen la propiedad de conservar los ángulos, mantienen la forma localmente. Si un par de curvas se cortan en un punto z_0 donde la transformación $w = f(z)$ es conforme, sus curvas imágenes se cortan en $w_0 = f(z)$ manteniendo el mismo ángulo (magnitud y sentido) entre sus rectas tangentes que el de las curvas originales.



El conocimiento de que $f'(z) \neq 0$ es suficiente para llegar a la conclusión de que la transformación es inyectiva (uno a uno) si se restringe a un entorno de z_0 suficientemente pequeño. Pero aun cuando sea $f'(z) \neq 0$ en todos los puntos d e un dominio no se puede afirmar que la aplicación sea inyectiva en ese dominio. Por eso diferenciamos en decir cuando una aplicación es conforme en cada uno de los puntos de un dominio y cuando es conforme sobre todo el dominio.

Teorema 1 Una transformación $w = f(z)$ que sea conforme en un punto z_0 tiene una inversa local en z_0.

Teorema 2 Supongamos que una función analítica $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ aplica un dominio D_z del plano z sobre un dominio D_w del plano w. Si $h(x,y)$ es una función armónica definida sobre D_w, entonces la función $H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y))$ es armónica sobre D_z.

Definición 1 Una transformación $w = f(z)$, se llama conforme en un punto z_0, si f es analítica en él y $f'(z) \neq 0$.

Definición 2 Una transformación w = f(z), definida en un dominio *D*, se llama conforme en cada uno de sus puntos, si f es analitíca en *D* y su derivada no tiene ceros en *D*.

Definición 3 Una transformación w = f(z), definida en un dominio *D*, se llama conforme en todo *D*, si f es inyectiva (uno a uno) y analítica en *D*.

III. Temperaturas Estacionarias

En la teoría de la conducción del calor, el flujo a través de una superficie interior a un sólido en un punto de esa superficie es la cantidad de calor que fluye en la dirección normal a la superficie por unidad de tiempo y por unidad de área en ese punto. Por lo tanto, el flujo se mide en unidades de calor por segundo por centímetro cuadrado. Se denota por Φ y su variación es proporcional a la derivada normal de la temperatura T en ese punto de la superficie:

$$\Phi = -K\frac{dT}{dN} \qquad (K>0)$$

La relación (1) se conoce como la *ley de Fourier* y la constante K se llama conductividad térmica del material del sólido, que supondremos homogéneo.

Los puntos del sólido se identifican mediante coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional. Restringimos nuestra atención a aquellos casos en los que la temperatura T varía sólo con las coordenadas x e y. Como T no varía con la coordenada del eje perpendicular al plano xy, el flujo de calor es bidimensional y paralelo a ese plano.

Suponemos que dentro del sólido no se crea ni se destruye energía térmica, es decir, no hay en él fuentes o sumideros de calor. Además suponemos que la función temperatura $T(x, y)$ y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en todo punto del interior del sólido.

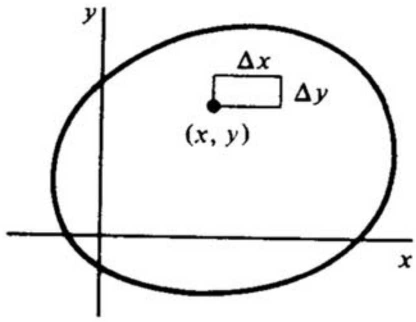
Consideremos ahora un elemento de volumen interior del sólido en forma de prisma rectangular de altura unidad, perpendicular al plano xy, con base de lados Δx, Δy en ese plano. El ritmo temporal del flujo de calor hacia la derecha, a través de la cara izquierda, es $-KT_x(x,y)\Delta y$; el ritmo de flujo hacia la derecha a través de la cara de la derecha es $-KT_x(x+\Delta x, y)\Delta y$. Restando el primero del segundo, obtenemos el ritmo neto de pérdida de calor de ese elemento de volumen por esas dos caras. El ritmo resultante se puede expresar

$$-K\left[\frac{T_x(x+\Delta x, y) - T_x(x,y)}{\Delta x}\right]\Delta x\Delta y$$

o como

$$-KT_{xx}(x,y)\Delta x\Delta y \qquad (1)$$

Si Δx es muy pequeño. Obviamente (1) es una expresión aproximada cuya precisión aumenta cuando Δx, Δy se hacen cada vez más pequeños.



Análogamente, el ritmo resultante para la pérdida de calor a través de las otras dos caras perpendiculares al plano *xy* viene dada por

$$-KT_{yy}(x,y)\Delta x\Delta y \quad (2)$$

Como el calor entra o sale del elemento de volumen únicamente a través de esas cuatro caras y las temperaturas dentro de él son estacionarias, la suma de las expresiones (1) y (2) debe ser cero:

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0 \quad (3)$$

La función temperatura satisface, por tanto, la ecuación de Laplace en todos los puntos interiores del sólido.

En vista de (3) y de la continuidad de la función temperatura y sus derivadas parciales, T es una *función armónica* de x e y en el interior del sólido.

Las superficies $T(x, y)=c_1$, donde c_1 denota una constante real, son las *isotermas* del sólido. Se pueden ver también como curvas en el plano *xy*, en cuyo caso $T(x, y)$ se interpreta como la temperatura en el punto (x, y) de una fina placa (o lámina) de material en ese plano, con sus caras aisladas térmicamente. Las isotermas son las curvas de nivel de la función T.

El gradiente de T es perpendicular a la isoterma en cada punto y el flujo máximo en un punto se produce en la dirección del gradiente en él. Si $T(x, y)$ denota las temperaturas en una fina placa y S es armónica conjugada de la función T, una curva $S(x, y)=c_2$ tiene el gradiente de T como vector tangente en todo punto donde la función analítica $T(x, y) + i\, S(x, y)$ sea conforme. Las curvas $S(x, y)=c_2$ se llaman *líneas de flujo*.

Si la derivada normal dT/dN es cero en una porción del borde de la placa, el flujo de calor a través de esa porción es nulo. Es decir, esa parte está aislada térmicamente y es, en consecuencia, una línea de flujo.

La función T puede denotar también la concentración de una sustancia que se difunde por un sólido. En tal caso, K es la constante de difusión.

IV. CONCLUSIÓN

Con este método, se tiene una herramienta poderosa en el manejo de la teoría del calor, de vital importancia en la teoría de gases ideales. Una isoterma es una curva que describe las proporciones presión-volumen a temperatura constante. Como el estado de la materia se puede detallar con tres variables y las mas comunes son presión, volumen y temperatura, si se fija temperatura queda una relación entre presión y volumen, para cada temperatura, siendo este uno de los tantos usos posibles, En todo problema que implique condiciones de fronteras, el método demuestra su eficacia.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. *1er. Cuatrimestre 2012,* pp. 84-85.
[2] Limusa Wiley, "Matemáticas avanzadas para Ingeniería", Kreyszing Vol II Tercera Edicion, pp. 335-339.
[3] Ruel V.Churill y James Ward Brown, “Variable Compleja y Aplicaciones”, quinta edición, pp. 289-291.