Aplicación de transformada Z: sistemas LTI

Gomila Molina Diego Tomás

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
diego_g_93@hotmail.com
Octubre 2014

Resumen: En este artículo se muestra la utilización de la Transformada Zeta en transformación de señales, más específicamente en sistemas LTI, conteniendo una introducción a los conceptos básicos de señales continuas y discretas, transformada Zeta, para finalmente concluir con una demostraron de la aplicación de esta para la transformación de señales analógicas a digitales.

Palabras clave: Sistemas LTI, Transformación de señales, Transformada Z.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada Z es utilizada para analizar y representar sistemas LTI[1] de tiempo discreto. La transformada Z es una generalización de la transformada de Fourier para tiempo discreto o las transformadas de Fourier y Laplace para el caso de tiempo continuo. Se emplea en el estudio del procesamiento de señales digitales, como son el análisis de circuitos digitales, los sistemas de radar o telecomunicaciones y especialmente en los sistemas de control de procesos por computadoras.

II. DESARROLLO

A. *Implementación sistemas LTI utilizando transformada z*

Los sistemas LTI son lineales e invariantes en el tiempo.

Considerando un sistema LTI de entrada x[n], salida y[n] y las propiedades de convolución de la transformada Z obtenemos

$$y[n] = h[n] * x[n] \xrightarrow{z} Y(z) = H(z)X(z) \tag{1}$$

Donde tenemos

- Y(z) = transformada Z de salida del sistema
- H(z) = transformada Z de respuesta impulsiva
- X(z) = transformada Z de entrada del sistema

Existen 3 tipos de sistemas LTI Causal, Estable y la combinación de ambos.

B. *Sistema LTI Causal*

Un sistema LTI es causal si la salida y[n] depende solamente del presente y pasado de la entrada x[n], pero no de su futuro. Suponiendo que el sistema es inicialmente de salida con resto cero

$$y[n]|_{n<0} = 0 \tag{2}$$

Entonces la respuesta y[n] =h[n] a un impulso x[n] = δ[n] con n = 0 es nula para n < 0. La respuesta a una entrada general x[t] es:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m] \tag{3}$$

[1] Sistema lineal invariante en el tiempo

Debido a las propiedades del ROC[2], debemos saber que si el sistema LTI es causal, entonces el ROC de la función de transferencia H(z) es el exterior de un círculo incluyendo el infinito. En particular, cuando H(z) es racional, el sistema es causal si y solo si el ROC es el exterior de un circulo que contiene el polo más lejano, y el orden del numerador no es mayor que el orden del denominador. El requerimiento del orden de los numeradores y denominadores garantiza la existencia de H(z) incluso cuando $z = \infty$.

C. *Sistemas LTI Estables*

Un sistema LTI es estable si cualquier salto de entrada es también un salto para toda n:

$$si\ [x[n]] < B_x\ entonces\ |y[n]| < \infty \tag{4}$$

Y

$$|y[n]| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]\right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] < B_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] < \infty \tag{5}$$

Lo cual requiere

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty \tag{6}$$

En otras palabras, si la función de respuesta de impulso h[m] de un sistema LTI es completamente integrable, entonces el sistema es estable.

Un sistema LTI es estable si y solamente si la respuesta de impulso es completamente sumable.

Por ejemplo: las salidas de la función de respuesta de frecuencia $H(e^{jw})$, el ROC de la función de transferencia H(z) incluye el círculo unitario $|z| = 1$.

$$H(z)|_{z=e^{jw}} = H(e^{jw}) = \mathcal{F}[h[n]] \tag{7}$$

D. *Sistemas LTI causal y estable*

De (5) y (6) también podemos ver que un sistema LTI causal con una función de transferencia racional H(z) es estable si y solo si todos los polos de H(z) están dentro del circulo unitario del plano z.

Por ejemplo la magnitud de todos los polos es menor que 1.

$$\left|Re|z_p|\right| < 1 \quad para\ todo\ z_p \tag{8}$$

III. EJEMPLOS DE IMPLEMENTACIÓN

A. *Función de transferencia de un LTI*

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{9}$$

Como se ve en (8) sin especificar el ROC, la H(z) puede ser la transformada z de una o dos posibles señales de tiempo h[n].

[2] Región de Convergencia

Figura 1: ROC $|z| > |a|$

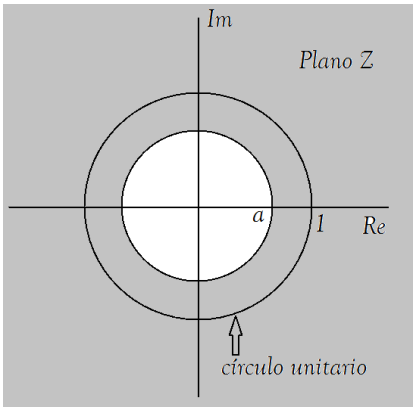
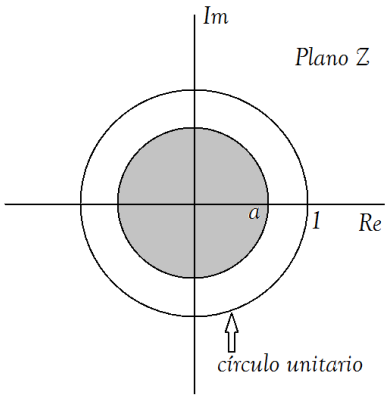


Figura 2: ROC $|z| < |a|$



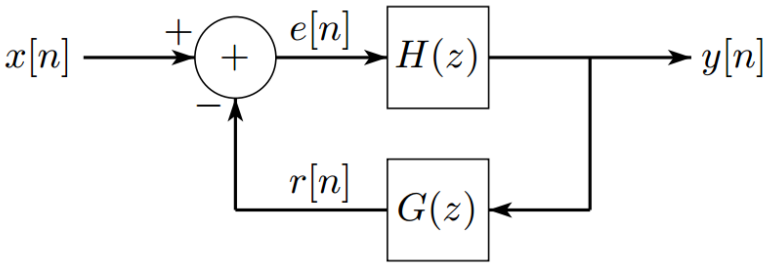


Figura 3: Diagrama sistema de feedback

- Si el ROC es $|z| > |a|$, el sistema $h[n] = a^n u[n]$ es causal.
  - Si $|a| < 1$, el círculo unitario puede ser incluido en el ROC, el sistema es estable.
  - Si $|a| > 1$, el círculo unitario no puede ser incluido en el ROC, el sistema es inestable.

- Si el ROC es $|z| < |a|$, el sistema $h[n] = -a^n u[-n-1]$ es anti-causal.
  - Si $|a| < 1$, el círculo unitario no puede ser incluido en el ROC, el sistema es inestable.
  - Si $|a| > 1$, el círculo unitario puede ser incluido en el ROC, el sistema es estable.

B. Sistema de Feedback

- x[n] es la señal de entrada de tiempo n.
- H(z) es llamada la función de sistema de la vía de progreso.
- y[n] es la señal de salida de tiempo n.
- y[n] también actúa como señal de entrada para el sub-sistema con transformada z de respuesta de impulso G(z).
- El sumador circular de la figura combina la señal de entrada x[n] y la de salida r[n] del controlador para formar la señal de error e[n]=x[n]-r[n], que es la señal de entrada al sub-sistema H.

Suponiendo que

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} h[k] \tag{10}$$

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} g[k] \tag{11}$$

Dado que la entrada al sub-sistema H es e[n] y la entrada al sub-sistema G es y[n]

$$y[n] = (e * h)[n] \tag{12}$$

$$r[n] = (y * g)[n] \tag{13}$$

Haciendo la transformada z de (12) y (13) nos da

$$Y(z) = E(z)H(z) \tag{14}$$

$$R(z) = Y(z)G(z) \tag{15}$$

Como $e[n] = x[n] - r[n]$

$$E(z) = X(z) - R(z) \tag{16}$$

De modo que

$$Y(z) = X(z) - R(z)H(z) = X(z) - Y(z)G(z)H(z) = X(z)H(z) - Y(z)G(z)H(z) \tag{17}$$

Despejando Y(z),

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} X(z) = Q(z)X(z) \tag{18}$$

Con

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} \tag{19}$$

Esto nos dice que la transformada z, Q(z), de la respuesta de impulso de todo el sistema de feedback, incluyendo los sub-sistemas H y G.

IV. Conclusión

La utilización de la transformada z en sistemas LTI es una herramienta muy útil en muchas ramas de la ingeniería. Generalmente trabajar con funciones de tiempo discreto se vuelve complicado mientras más amplias son, utilizando la transformada z se simplifica mucho los cálculos a realizar además de resolver problemas relacionados con la discontinuidad de la función, quedando generalmente polinomios o funciones de expresiones sencillas de analizar y resolver. La contra que tiene trabajar con esta función es que se tiene que prestar atención a las regiones de convergencia del plano z, lo cual no es sencillo al inicio.

Su utilización en la ingeniería electrónica es lo que me llamo la atención ya que es particularmente amplia dado que se trabaja mucho con transformación de señales analógicas a digitales, y viceversa, cálculos de entrada y salida de un sistema y resolución de ecuaciones diferenciales.

Referencias

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_LTI , [acceso el 10 de marzo de 2015].

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_Z, [acceso el 24 de julio de 2010].

[2] [internet], disponible en http://fourier.eng.hmc.edu/e102/lectures/Z_Transform/node8.html, [acceso el 10 de marzo de 2015].

[3] M. en C. Luis Adrián Lizama Pérez, *"Control Digital/Avanzado Estabilidad, Función de Transferencia, Transformadas"*, [internet], disponible en http://slideplayer.es/slide/1661850, [acceso el 10 de marzo de 2015].

[4] The University of British Columbia, *Mathematics Departament*, [internet], disponible en http://www.math.ubc.ca/~feldman/m267/ltiz.pdf, [acceso el 10 de marzo de 2015].