Transformada de Laplace en la resolución de Circuitos Eléctricos

Diego A. Ainciondo

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur. Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
diegoainciondo@gmail.com
Septiembre 2011

Resumen: En este informe se estudiará una de las aplicaciones de la asignatura Funciones de variable Compleja. La Transformada de Laplace es muy utilizada en las ramas de ingeniera electrónica y eléctrica para la resolución de circuitos eléctricos mediante un modelo matemático. Se expondrá detalladamente la parte teórica y se ilustrará con ejemplos.

Palabras clave: circuitos, transformada de Laplace, ecuaciones integro-diferenciables, teorema del valor final e inicial.

I. INTRODUCCIÓN:

En la mayoría de las asignaturas correspondientes a la carrera de Ingeniería Electrónica se estudian circuitos eléctricos, en su mayoría formados por elementos como resistencias, capacitores e inductancias, en el caso que las excitaciones no están restringidas a constantes, el modelo matemático constituido por ecuaciones integro-diferenciales que describe a un circuito tiene un alto nivel de complejidad. Para encontrar las soluciones a estas ecuaciones a menudo se utiliza la Transformada de Laplace donde las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones algebraicas lineales en el dominio complejo y nos permiten usar las herramientas del algebra lineal para hallar y analizar sus soluciones.

II. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace se define de la siguiente forma:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad (1)$$

Si la integral existe, $f(t)$ que es una función temporal se trasforma en $F(s)$ que es una función de variable compleja S.

En este informe no solo se intentara explicar la herramienta de la transformada para la resolución de las ecuaciones diferenciales, sino también analizaremos los resultados y los expresaremos en el dominio tiempo nuevamente, para así poder apreciar las formas de onda de las distintas variables que se obtienen como respuesta. Esto se logra a través de lo que llamamos Transformada Inversa de Laplace, no ahondaremos más detalles sobre este tema en particular, simplemente para la antitrasformación utilizaremos valores tabulados para no confundir a lector con tanta teoría matemática.

III. CIRCUITOS ELECTRICOS.

Supongamos tener un circuito eléctrico tal como se muestra en la figura (1), compuesto por una fuente de tensión, una resistencia y una inductancia conectada en serie entre sí.

Si planteamos las ecuaciones del modelo matemático (siempre suponiendo que es un sistema lineal e invariante en el tiempo) de este circuito nos encontramos con la siguiente ecuación diferencial

$$H(t) = \frac{1}{c}\int_0^T i(t)dt + i(t)R \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta que, $H(t)$ es una fuente que entrega al circuito un escalón de voltaje, $i(t)$ es la corriente que circula por el circuito, R y C (consideremos que el capacitor se encuentra inicialmente descargado) son los correspondientes valores de las impedancias de la resistencia y el capacitor respectivamente

A continuación aplicaremos la Transformada de Laplace, para transformar tanto derivadas como las integrales de la función en una ecuación lineal:

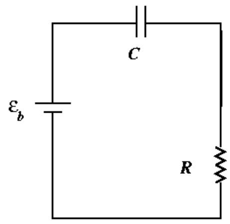

Figura 1. Circuito RC serie.

$$\frac{1}{s} = I(S)R + \frac{1}{SC}I(S) \tag{3}$$

Podemos observar que la complejidad de la resolución de la ecuación (2) muy elevada en comparación con la dificultad presentada por la ecuación (3).

Ahora podemos despejar $I(S)$ y encontrar el valor de la corriente que circula por los elementos en el plano transformado:

$$I(S) = \frac{C}{SCR+1} \tag{4}$$

Analizando la expresión (4), nos damos cuenta que no nos brinda ninguna información útil con respecto al problema físico del circuito eléctrico, pero como se mencionó en la primera parte, existe lo que llamamos Transformada Inversa de Laplace, al antitransformar vamos a poder observar como evoluciona la corriente a medida que el tiempo avanza.

$$L^{-1}\{I(S)\} = e^{\frac{-t}{RC}} \tag{5}$$

En la figura (2) se puede ver como evoluciona la corriente del circuito, para la grafica tomamos como valores arbitrarios R=10Ω y C=1F.

IV. TEOREMA DEL VALOR FINAL.

Estos dos teoremas son aplicados en el campo transformado S, son una herramienta más que nos brinda la Transformada de Laplace para poder hallar los valores iniciales y finales de una función temporal sin la necesidad de una antitransformación.

Lo que enuncia el teorema del valor final es lo siguiente:

Si f y f' admiten antitransformada de Laplace para $Re(s) > 0$ y $L\{f(t)\} = F(S)$

$$\lim_{s\to 0} SF(S) = \lim_{t\to\infty} f(t) \tag{6}$$

En el caso de que el límite de la función en la variable tiempo exista, dicho valor será al cual la función tendera cuando t tienda a infinito.

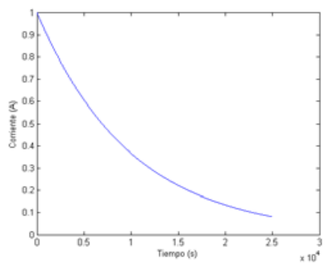

Figura 2. Evolución de la corriente *i*(*t*) con respecto al tiempo.

Aplicaremos el límite (6) a nuestro ejemplo mencionado anteriormente:

$$\lim_{s\to 0} \frac{S}{(S+\frac{1}{10})} = 0$$

Lo cual concuerda con el valor a la que tiende la gráfica de la figura 2 cuando t toma valores grandes.

V. TEOREMA DEL VALOR INICIAL.

Ahora buscaremos el valor inicial mediante el teorema del valor inicial, teorema que enuncia lo siguiente: Si f y f' son continuas a tramos y de orden exponencial, $L\{f(t)\} = F(S)$

$$\lim_{\substack{Re(s)\to+\infty \\ Im(s)=0}} SF(S) = \lim_{t\to 0} f(t) \tag{7}$$

Al igual que en el teorema del valor final, en el caso que el límite de la función en la variable tiempo tome un valor finito, dicho valor será el que tome la función en $t = 0$.

Aplicamos el límite planteado en la ecuación (7) a nuestra expresión de la corriente en el plano transformado:

$$\lim_{\substack{Re(s)\to+\infty \\ Im(s)=0}} \frac{S}{(S+\frac{1}{10})} = 1$$

El valor hallado en el límite calculado, es el que toma la función en $t = 0$, tal como se ve en la figura 2.

Como se pudo apreciar, con la utilización ambos teoremas, podemos obtener información útil, ya que en la mayoría de los casos se pretende saber el valor inicial de la corriente o bien el valor que toma luego de transcurrido un tiempo considerable, es decir, el estado estacionario.

VI. PUNTOS CLAVES AL TRABAJAR CON LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS Y EVITAR ERRORES:

1. Escribir las ecuaciones correspondientes que modelen el circuito en el dominio temporal.
2. Transformar al dominio S dichas ecuaciones, siempre teniendo en cuenta las condiciones iniciales que esta puede tener.
3. Resolver las ecuaciones lineales y obtener los resultados de las variables que se requiera.
4. Antitransformar y volver al dominio tiempo para así poder analizar los resultados, o también está la opción de aplicar el teorema de valor final o inicial, para saber los valores iniciales y finales de la función evitando el trabajo de la anti transformación.

VII. CONCLUSIÓN.

En este pequeño informe se intentó explicar el gran poder que tiene la Transformada de la Laplace, en la resolución de circuitos eléctricos, debido a la simplificación de las ecuaciones integro-diferenciales, así como la gran utilidad de los teoremas de Valor Inicial y Final, para un análisis menos laborioso del comportamiento de algunas funciones reales que representan variable eléctricas en un tiempo inicial o final.

REFERENCIAS.

[1] F. B. Hildebrand , “Métodos de cálculo para ingenieros”.
[2] Pedro Doñate y María Belén D´Amico, “Notas de curso Análisis y Diseño de Circuitos y Sistemas”.
[3] Guillermo Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja” 1er. Cuatrimestre 2009.