Análisis de Fourier: efectos de un medio físico ideal en la transmisión de una señal digital

Pedro Manuel Díaz Varela,

Estudiante de Ingeniería en Computación,
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000 CPB Bahía Blanca, Argentina,
pedro.divar@gmail.com

Agosto 2013

Resumen: En este trabajo se desarrolla la descomposición de una señal digital periódica mediante uno de los métodos más utilizados para estudiar el comportamiento en frecuencia de una señal: las series de Fourier. Se introduce la noción de ancho de banda con el objeto de mostrar como es afectada la señal al ser transmitida por un medio físico idel (cable). Además, para entender más claramente los conceptos presentados se muestra un ejemplo que se desarrolla utilizando un programa de cálculo simbólico.

Palabras clave: Series de Fourier, señal digital, ancho de banda

I INTRODUCCION

La representación de señales en el dominio frecuencia es muy importante para entender lo que sucede en la transmición de datos. Uno de los métodos que se utiliza en la descomposición de señales es el análisis de Fourier. Éste tiene su origen en trabajos para estudiar la ecuación del calor desarrollados alrededor de 1820 por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, ver [2]. Ésta teoría es la que hoy se conoce como series de Fourier.

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a tramos. Estas series son la herramienta básica del análisis de Fourier y se usan para analizar funciones periódicas a través de su descomposición en una suma infinita de funciones más simples, esto es como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras, ver [1, 4].

En este trabajo en particular, se utilizan estas series para el análisis de la descomposición de una señal digital periódica y su transmisión a través de un medio físico ideal, ver [5, 6].

Cabe destacar que es una herramienta muy útil en la teoría matemática y además tiene importantes aplicaciones en diversas ramas de la ingeniería, como por ejemplo: acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, etc., ver [3, 5].

II ANÁLSIS DE FOURIER

En esta sección se verá un resumen de los fundamentos teóricos de la descomposición en series de Fourier de una señal particular formada por la repetición periódica de un caracter ASCII (byte).

A *Resumen Teórico de series de Fourier para señales periódicas*

La señal periódica $s(t)$ continua a tramos con período T ($s(t) = s(t+T)$) y frecuencia $\omega = 1/T$, puede descomponerse en una suma infinita senos y cosenos de la siguiente forma:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2\,\pi\,n\,\omega\,t) + b_n \sin(2\,\pi\,n\,\omega\,t) \right), \tag{1}$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(2\,\pi\,n\,\omega\,t)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(2\,\pi\,n\,\omega\,t)dt.$$

En la formula (1), ω es la inversa del período de la señal que se denomina frecuencia fundamental de la señal $s(t)$. El primer término de (1) a_0 es una constante, que se denomina componente continua de $s(t)$. El resto de términos de lo forman los infinitos componentes de la sumatoria, que se denominan armónicos o componentes armónicas de $s(t)$. Estos armónicos son los que nos permiten el estudio en frecuencia de dicha señal periódica. De esta manera el armónico n-ésimo de la señal $s(t)$ viene dado por:

$$s_n(t) = a_n \cos(2\,\pi\,n\,\omega\,t) + b_n \sin(2\,\pi\,n\,\omega\,t). \tag{2}$$

La amplitud de cada sinusoidal de un armónico n viene marcada por los terminos a_n y b_n. Estos coeficientes ponderan la contribución de la frecuencia de este armónico en la señal original $s(t)$, y se calculan por medio de las expresiones dadas antes. La potencia o amplitud de un armónico n se calcula como:

$$|P| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{3}$$

La representación gráfica de este desarrollo en serie es muy clara si se lo hace en función de la frecuencia, lo que da lugar a representaciones denominadas: Espectros en Frecuencia.

Como para cada componente se indican dos datos : amplitud y fase, se obtienen los espectros de Amplitud y de Fase. En ambos casos se tiene sólo valores para un número entero de veces la frecuencia fundamental, lo que implica un espectro de líneas, discreto, y no una curva continua. En el ejemplo desarrollado en la sección IV se muestran gráficos del espectro de amplitud.

B Cálculo de la Serie de Fourier de una señal particular

Un caracter en ASCII contiene 8 bits (1 byte). Se quiere transmitir continuamente un byte en la que un nivel bajo de la señal $s(t)$ indica un valor lógico de 0 y un nivel alto de $s(t)$ indica un valor de 1. Si T es el período del byte y se define la señal a transmitir como:

$$s(t) = \begin{cases} bit(0) & \forall t \in [0 + Tn, T/8 + Tn), \\ bit(2) & \forall t \in [T/8 + Tn, T2/8 + Tn), \\ \vdots & \\ bit(7) & \forall t \in [T7/8 + Tn, T + Tn), \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Donde $bit(i)$ representan el valor del bit i-ésimo del byte a transmitir.

A partir de $s(t)$ se puede realizar el cálculo de los términos a_0, a_n y b_n.

$$a_0 = 1/T \int_0^T s(t)dt.$$

Como $s(t)$ esta definida por partes se desarrolla la integral como sigue:

$$a_0 = 1/T \left(\int_0^{T/8} bit(0)dt + \int_0^{T2/8} bit(1)dt + \cdots + \int_0^{T7/8} bit(7)dt \right),$$

como los $bit(i)$ son constantes, se resuelve la integral y finalmente a_0 resulta de la forma:

$$a_0 = \frac{1}{T}\left(bit(0)T/8 + bit(1)T/8 + ... + bit(7)T/8\right) = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{7} bit(i).$$

Los coeficientes a_n y b_n se pueden calcular de la misma forma usando las fórmulas dadas, donde el resultado que se obtiene es el siguiente

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\sum_{i=0}^{7}\left(bit(i)(\cos(n\pi(i+1)/4) - \cos(n\pi i/4))\right), \quad b_n = \frac{1}{n\pi}\sum_{i=0}^{7}\left(bit(i)(\sin(n\pi(i+1)/4) - \sin(n\pi i/4))\right). \tag{5}$$

III TRANSMICIÓN DE INFORMACIÓN DIGITAL

Una señal digital esta formada por infinitos armónicos, y para que sea transmitida con total precisión se necesita un medio físico que permita pasar los infinitos armónicos, cosa que no existe en la realidad, por lo tanto en la transmición de una señal digital la señal que se transmite resulta inevitablemente atenuada (se recorta el número de armónicos a un número finito). El conocimiento de ciertos aspectos del medio físico y de la señal dada permite conocer la cantidad de armónicos que llegan al receptor a través del medio sin distorción.

A *Ancho de Banda*

El *ancho de banda de una señal* se define como el rango de frecuencias que ocupa la señal en el espectro de amplitudes. Dicho de otra forma, el ancho de banda de una señal es el ancho del espectro de amplitudes de dicha señal.

El ancho de banda es un concepto que también se aplica a los canales o medios de transmisión. El *ancho de banda de un canal* se define como el rango de frecuencias en las que los armónicos no sufren atenuación al ser transmitidos desde el extremo emisor hasta el extremo receptor del canal. Cualquier medio de transmisión que se utilice para transmitir una señal podrá transmitir sólo un ancho de banda limitado.

B *Velocidad de Transmición de una señal digital*

La *velocidad de transmición* es el número de bits que se transmiten en un segundo, esta es una caracteristica exclusiva de las señales digitales, que son las únicas que se pueden expresar en bits y tienen forma cuadrada ya que sólo puede tomar 2 niveles de tensión.

C *Relación entre ancho de banda del canal y velocidad de transmición*

La máxima velocidad de transmisión con la que se puede transmitir una señal por un determinado medio depende del ancho de banda del canal.

Sea una señal digital $s(t)$ que transmite un byte continuamente de período T. Como la frecuencia fundamental es ω, la velocidad de transmición es $v_t = 1/T_{bit}$, luego el período de un bit $T_{bit} = T/8$. Por lo tanto,

$$v_t = 1/T_{bit} = 1/T/8 = 8/T = 8\omega \tag{6}$$

Se puede calcular el número de armónicos N que un ancho de banda B determinado deja pasar, ya que se sabe que la frecuencia del N-ésimo armónico es N veces la frecuencia fundamental ω.

Como $B = N\omega$ luego, $N = B/\omega = B/v_t/8 = 8B/v_t$.

IV EJEMPLO

En este ejemplo se realiza el cálculo del desarrollo en series de Fourier el caracter ASCII "e" = 01100101 que se repite periódicamente para ser transmitido por una señal $s(t)$, conocidos el número de armónicos N y el período T. Él número de armónicos N puede ser dado *(A)* o se puede obtener con el ancho de banda del canal y la velocidad de transmición conocida *(B)*.

A *Desarrollo hasta el número de armónicos $N = 8$ y período $T = 1$*

Se usa (4) para describir $s(t)$:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [0+n, 1/8+n), \\ 1 & \forall t \in [1/8+n, 2/8+n), \\ 1 & \forall t \in [2/8+n, 3/8+n), \\ 0 & \forall t \in [3/8+n, 4/8+n), \\ 0 & \forall t \in [4/8+n, 5/8+n), \\ 1 & \forall t \in [5/8+n, 6/8+n), \\ 0 & \forall t \in [6/8+n, 7/8+n), \\ 1 & \forall t \in [7/8+n, 8/8+n). \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

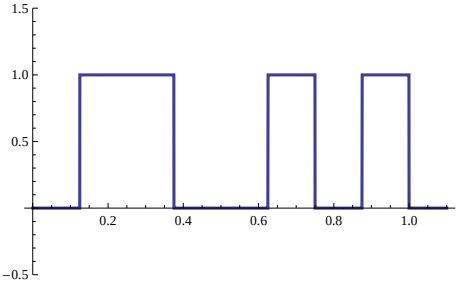
Luego se calculan a_0, a_n, b_n sabiendo que $\omega = 1$:

$$a_0 = 1/2$$

$$a_n = \frac{-\text{Sin}\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \text{Sin}\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - \text{Sin}\left(\frac{5n\pi}{4}\right) + \text{Sin}\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \text{Sin}\left(\frac{7n\pi}{4}\right) + \text{Sin}(2n\pi)}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{\text{Cos}\left[\frac{n\pi}{4}\right] - \text{Cos}\left[\frac{3n\pi}{4}\right] + \text{Cos}\left[\frac{5n\pi}{4}\right] - \text{Cos}\left[\frac{3n\pi}{2}\right] + \text{Cos}\left[\frac{7n\pi}{4}\right] - \text{Cos}[2n\pi]}{n\pi},$$

$s(t) \approx S_8(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{8} (a_n \cos(2\,\pi\,n\,\omega\,t) + b_n \sin(2\,\pi\,n\,\omega\,t))$.



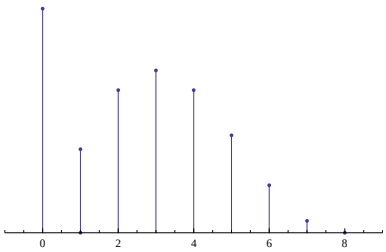
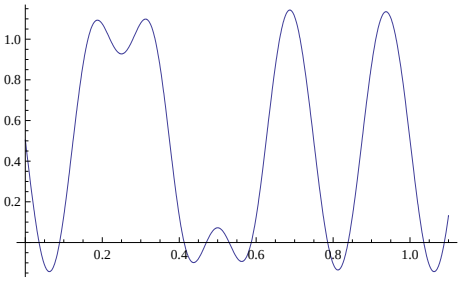


Fig. 1 (a) Señal $s(t)$, para $t \in [0, 1]$ (b) Espectro de amplitud.



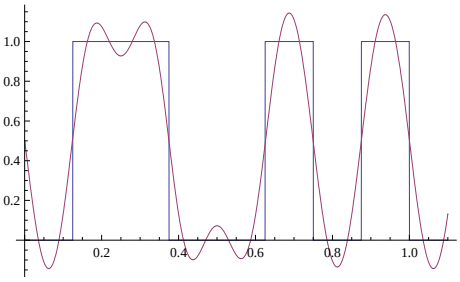


Fig. 2 (a) Desarrollo $F(t)$, para $t \in [0, 1]$ (b) Comparación $s(t)$ y $S_8(t)$.

Luego de calcular la serie que representa la señal se puede calcular con (6) la velocidad de transmisión y el ancho de banda del canal necesario para que la cantidad de armónicos elegido atraviese el canal sin sufrir distorsión.

Como $v_t = 8/\omega = 8$ luego el ancho de banda necesario es $B = N\omega = 8$.

B Velocidad de transmisión y ancho de banda del canal dados

Si se transmite la señal digital dada con $T = 1$ por un cable (filtro pasa bajo ideal) con una velocidad de transmisión v_t de 1000 bps y un ancho de banda B de 100000 hz (banda pasante de 0 a 10 Khz), determine la cantidad de armónicos que pasan a través del cable:

$$v_t = 8\omega$$

$$\omega = 1000/8 = 125hz$$

$$N = B/\omega$$

$$N = 10000/125 = 80$$

luego N es la cantidad de armónicos que pasan a través del canal ideal sin sufrir distorsión, en este caso, 80.

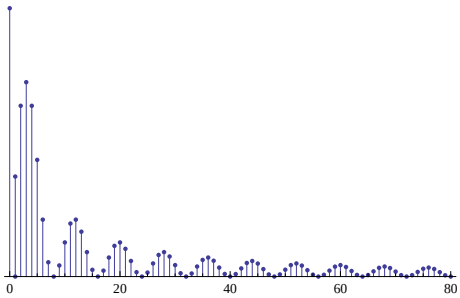
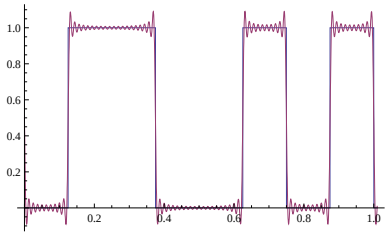


Fig. 1 (a) Espectro de amplitud



(b) Comparación $s(t)$ y $S_{80}(t)$.

V CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado que la representación de señales en el dominio frecuencia, a través del desarrollo en serie de Fourier, es muy importante para entender lo que sucede en la transmisión de datos. En particular se analizo una señal digital formada por un caracter ASCII que se repite periódicamente para ser transmitido por una señal $s(t)$. El ejemplo desarrollado incrementa la comprensión de los conceptos fundamentales que involucran el análisis de Fourier dentro del marco de la transmisión de datos.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, *Guía de definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja*, Universidad Nacional del Sur, Argentina (2013).

[2] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur* (in French). Paris: Firmin Didot Père et Fils, (1822).

[3] J. Glin, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Prentice Hall, (2004).

[4] E. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Ed. Limusa, Tomo II, (2003).

[5] A. Tanenbaum, *Redes de computadoras*, Pearson Education, México (2003).

[6] Unidad Docente de redes de Computadoras, *Fourier*, Universidad Politécnica de Valencia, (internet: http://www.redes.upv.es/rds/es/practicas/Fourier.pdf).