Transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones de dinámica de resortes

Joaquín Cuchan

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
joaquin_4_95@hotmail.com
Agostos 2015

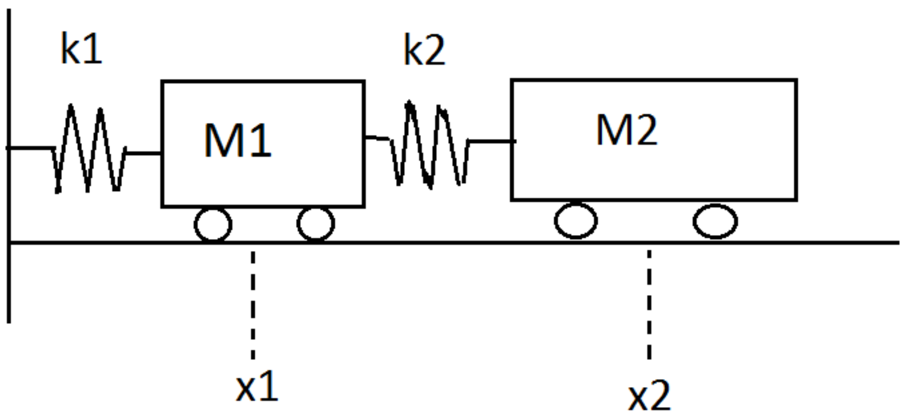
Resumen: El siguiente informe muestra una de las aplicaciones de la transformada de Laplace en problemas físicos. En este caso se empleara para resolver las ecuaciones de fuerza de 2 bloques contiguos unidos por resortes y así poder describir los movimientos de ambos bloques. Para esto el lector deberá tener conocimientos de los conceptos básicos de dinámica, los cuales serán introducidos, así como también de ecuaciones diferenciales de segundo orden.
Palabras clave: Transformada de Laplace, ecuaciones de fuerza, descripción de movimiento

I. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil en física ya que gracias a ella podemos representar el comportamiento de sistemas físicos complejos de forma más sencilla. Es necesario tener en cuenta que vamos a desarrollar en siguiente documento partiendo de la siguiente ecuación.

$$\vec{F} = m.\vec{a} \tag{1}$$

Esta expresión es una ecuación vectorial, ya que tanto la fuerza como la aceleración llevan dirección y sentido. Por otra parte, cabe destacar que la aceleración no es la variación de la posición, sino que es la variación con la que varía la velocidad.
Cabe destacar que en cualquier sistema físico, en el cual, el comportamiento queda definido a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales, son posibles de aplicar las transformaciones de Laplace para estudiar su comportamiento y así poder agregarlos a otros subsistemas, para conseguir un fin determinado.
En el siguiente informe se desarrollara un sistema físico que quedara representado por el siguiente gráfico:



En el gráfico se ven ambos cuerpos apoyados sobre ruedas ya que se considerara un sistema ideal sin rozamiento, a su vez, analizaremos un caso en el que la fuerza aplicada fue comprimiendo el sistema.
Cabe desatacar que ambas masa (m1 y m2), como las dos constantes de los resortes (k1 y k2) son datos que tenemos.
Para resolver el sistema de ecuaciones de fuerza utilizaremos la transformada de Laplace que definida de la siguiente manera:

$$F(S) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt. \tag{2}$$

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

De la ecuación (i) podemos deducir que si actúan fuerzas sobre los cuerpos, el cambio que se provoca en su aceleración es proporcional a la fuerza aplicada y dicho cambio se produce en la dirección sobre la que se apliquen dichas fuerzas.

Ahora bien cada cuerpo queda expresando de la siguiente manera:

- Para el cuerpo 1:

$$m_1.\ddot{x}_1(t) = k_2.x_2(t) + (k_1 + k_2).x_1(t) \tag{3}$$

- Para el cuerpo 2:

$$m_2.x_2(t) = k_{2.}\,\ddot{x}_1(t) + k_2.x_2(t) \tag{4}$$

Nota: llamamos a “x dos puntos” como la aceleración, y X(t) como la posición, ambos medidos respecto del tiempo.

Ahora para analizar el problema lo que haremos será dar las condiciones iniciales de los problemas, las cuales van a ser:

- ✓ Para el bloque uno se le dará una velocidad con sentido positiva en el versor î.
- ✓ Para el bloque dos se le dará una velocidad con sentido negativo en el versor î.
- ✓ Consideraremos ambas velocidades de magnitudes iguales
- ✓ La masa del bloque uno será mayor que la masa del bloque 2.

Las ecuaciones de fuerza ahora quedaran:

Bloque 1:

$$x_1 = -10x_1 + 4x_1 \tag{5}$$

Bloque 2:

$$x_2 = 4x_1 - 4x_2 \tag{6}$$

Las condiciones iniciales son $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 1, X_2(0) = 0, x_2(0) = -1, k_1 = 6, k_2 = 4$

Aplicando la transformada de Laplace a (6) y (5) y acomodándolas nos quedan respectivamente:

Bloque 1:

$$(S^2 + 10).X_1(S) - 4X_2(S) = 1 \tag{7}$$

Bloque 2:

$$-4X_1(S) + (S^2 + 4).X_2 \tag{8}$$

De la ecuación (8) despejamos a X1 en función de X2 obtenemos que:

$$X_1(S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.(S^2+4).X_2(S) \tag{9}$$

Ahora volvemos a la ecuación del bloque 1 y reemplazamos para llegar a la siguiente ecuación:

$$(S^2+10)(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(S^2+4).X_2(S)) - 4X_2(S) = 1 \tag{10}$$

Acomodamos la ecuación despejando a X2 en función del parámetro S

$$X_2(S) = \frac{-S^2-6}{(S^2+2)(S^2+12)} \tag{11}$$

Luego de acomodar (11), aplicamos la trasformada inversa de Laplace y obtenemos

$$x_2(t) = \frac{-\sqrt{3}}{10}.sen(\sqrt{12}t) - \frac{\sqrt{2}}{5}.sen(\sqrt{2}t) \tag{12}$$

Uniendo (11) con (9) y atitransformando utilizando propiedades, obtenemos que

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{3}}{5}sen(\sqrt{12}t) - \frac{\sqrt{2}}{10}sen(\sqrt{2}t) \tag{13}$$

Ambas ecuaciones ((11) y (12)) representan la variación de la posición de cada bloque respecto del tiempo y podemos observar que nunca tienden asintóticamente a ningún valor debido a que en el caso analizado no se considera rozamiento, por lo cual, una vez iniciado el movimiento no se detendría nunca.
Es necesario tener en cuenta las condiciones iniciales para poder simplificar los cálculos, de todas maneras si no las tuviéramos, con un desarrollo bastante más extenso, llegaríamos a una solución generalizada que tuviera como resultado el mismo comportamiento.

Como primera conclusión podemos decir que las expresiones de los cuerpos quedan descriptas con funciones senoidades o cosenoidales, lo que implica que en algún tiempo t llegaran a su amplitud máxima, donde su velocidad será nula y su aceleración máxima, para así retornar a su posición de equilibrio, en la cual la aceleración es nula y su velocidad es máxima.
La expresión de la posición será senoidal cuando partan de su posición en equilibrio y se vean sometidas a una fuerza externa, y será cosenoidal cuando sean desplazados de su posición de equilibrio y se los suelte para que interactúen con los resortes.
Como segunda conclusión, debido a la falta de rozamiento podemos notar que las ecuaciones perduran a lo largo del tiempo, haciéndolo de la misma manera luego de un periodo t, repetirán su movimiento indefinidamente hasta que alguna fuerza externa detenga el sistema.

III. Referencias

[1] Luis Ochoa "Dinámica Clásica" vol. 1
[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Newton
[3] https://www.youtube.com/watch?v=0TiH5ZakojY
[4] https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace