Resolución de circuitos RLC mediante la aplicación de Transformadas de Laplace

Cristian Iván Eterovich

Estudiante de Ingeniería Electricista/Electrónica/en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
cristianivan2003@hotmail.com
Abril 2012

Resumen: En este artículo se pretende explicar cómo la utilización de las Transformadas de Laplace nos ayuda en la resolución de ecuaciones diferenciales, y en particular, para la resolución de circuitos eléctricos RLC.

Palabras clave: *transformadas de Laplace, circuitos RLC, ecuaciones diferenciales.*

I. INTRODUCCIÓN

El uso de circuitos eléctricos es parte de la vida cotidiana, dado que los aparatos que utilizamos diariamente, y que nos hacen un poco más fácil nuestro entorno, tienen como base un circuito eléctrico para su funcionamiento. Analizaremos un circuito eléctrico simple, compuesto por **resistores**, **capacitores** e **inductancias**, regidos por las leyes de *Kirchhoff*, y cuyo comportamiento se describe generalmente por una ecuación diferencial de segundo orden.

Sera conveniente, antes del análisis propuesto, definir una serie de conceptos, leyes y teoremas que ayudaran a una mejor comprensión de los temas tratados y del desarrollo de la solución propuesta.

II. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Los circuitos eléctricos pasivos están construidos con tres elementos básicos, a saber:

A. *Resistores*

Un resistor (Figura 1) es un componente electrónico diseñado para introducir una resistencia eléctrica determinada entre dos puntos de un circuito, que tiene una resistencia R medida en ohms Ω , es decir, representa una resistencia al flujo de corriente.

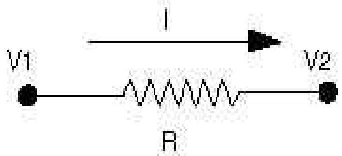

Figura 1: Representación simbólica de un resistor

B. *Capacitores*

Un capacitor (Figura 2) es un dispositivo capaz de almacenar energía sustentando un campo eléctrico, formado por un par de superficies conductoras, en forma de láminas o placas, separadas por un material aislante, que tiene una capacitancia C medida en Faradios F. El efecto del capacitor es la de detener el flujo de corriente cuando alguna de sus placas se carga.

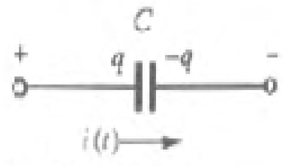

Figura 2: Representación simbólica de un capacitor

C. *Inductores*

Un inductor (Figura 3) o bobina es un componente que, debido al fenómeno de la autoinducción, almacena energía en forma de campo magnético, y tiene una inductancia L medida en henrys H. Al pasar la corriente a través de una bobina L, se produce un campo magnético que se opone a cualquier cambio en la corriente que circula a través de ella.

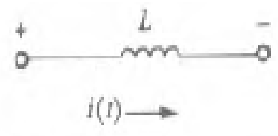

Figura 3: Representación simbólica de una inductancia

Asimismo, asociado con los circuitos eléctricos, tenemos las variables **corriente** *i(t)*, medida en amperes A, y el **voltaje** *v(t)*, medido en volts V. Ademas, el flujo de corriente en el circuito esta relacionado con la carga *q(t)*, medida en coulombs C, mediante la relacion,

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Las relaciones entre el flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje *v(t)* a través de estos elementos en el tiempo *t* se pueden expresar mediante las siguientes leyes:

Ley 1 *La caída de voltaje a través de una resistencia es proporcional a la corriente que pasa a través de la resistencia.*

Si E_R es la caída de voltaje a través de una resistencia e I es la corriente, entonces:

$$E_R = RI \tag{2}$$

Donde R es la constante de la Resistencia. A esta ley también se la conoce como *Ley de Ohm.*

Ley 2 *La caída de voltaje a través de un inductor es proporcional a la tasa de tiempos instantánea de cambio de la corriente.*

Si E_L es la caída de voltaje a través del inductor, entonces:

$$E_L = \frac{dI}{dt} \tag{3}$$

Donde L es la constante de proporcionalidad llamada coeficiente de inductancia o simplemente inductancia.

Ley 3 *La caída de voltaje a través de un capacitor es proporcional a la carga eléctrica instantánea en el capacitor.*

Si E_c es la caída de voltaje a través del capacitor y q la carga instantánea, entonces:

$$E_C = \frac{q}{C} \tag{4}$$

Donde hemos tomado $1/C$ como la constante de proporcionalidad, y C se lo conoce como el coeficiente de capacitancia o simplemente capacitancia.

La interacción entre los elementos individuales que forman un circuito electrónico está determinada por las **leyes de Kirchhoff,** las cuales se enuncian a continuación:

Ley 1 *La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.*

Ley 2 *La suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.*

Finalmente, para la resolución algebraica del circuito RLC propuesto, se utilizara el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sea $f(t)$ una función tal que su transformada de Laplace es $F(s), Re(s) > p$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces la función $e^{\alpha t} f(t)$ tiene también transformada de Laplace, y estará dada por:*

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(s - \alpha), \quad Re(s) > p + Re(\alpha)$$

III. CIRCUITO RLC EN SERIE – EJEMPLO Y APLICACIÓN DEL MÉTODO.

Una vez establecidos los teoremas, leyes y definiciones necesarias, podemos aplicarlos a un circuito RLC para determinar las ecuaciones que corresponden al mismo, las cuales, mediante la utilización de las técnicas de la transformada de Laplace, pueden ser analizadas y resueltas, en particular, para determinar la carga *q(t)* en el capacitor y la corriente resultante *i(t)* en el circuito.

El método de resolución resultara bastante sencillo; bastara plantear las ecuaciones diferenciales que caractericen al circuito, luego aplicar las técnicas de transformada de Laplace, para poder transformar dichas ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas donde las soluciones pueden ser encontradas fácilmente, y finalmente aplicar la transformada inversa y recuperar las soluciones del problema original.

Consideremos el circuito RLC serie de la figura 4, que está formado por un resistor R, un capacitor C y un inductor L, conectados a una fuente de voltaje *E(t).* Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante son cero. La aplicación de las transformadas de Laplace nos permitirán determinar la carga *q(t)* en el capacitor y la corriente resultante *i(t)* en el circuito en un tiempo t posterior.

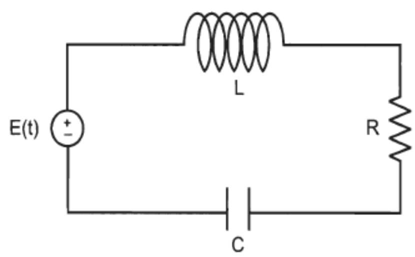

Figura 4: Circuito RLC

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito anterior, obtenemos lo siguiente:

$$\mathrm{Ri} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{\mathrm{C}}\int \mathrm{i\,dt} = \mathrm{E(t)}$$

Que, utilizando la relacion (1), la anterior se resume a:

$$\mathrm{L}\,\frac{\mathrm{d^2q}}{\mathrm{dt^2}} + \mathrm{R}\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{\mathrm{C}}\,\mathrm{q} = \mathrm{E(t)}$$

Sustituyendo las variables L, R, C y E(t) con los valores: L = 1H, R = 160 Ω, C = 10^{-4} F y E(t) = 20 V, tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d^2q}}{\mathrm{dt^2}} + 160\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}} + 10^4\,\mathrm{q} = 20$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuacion diferencia, llegamos a la siguiente expresion:

$$(\mathrm{s}^2 + 160\mathrm{s} + 10^4)\mathrm{Q(s)} = [\mathrm{sq}(0) + \dot{\mathrm{q}}(0)] + 160\mathrm{q}(0) + \frac{20}{\mathrm{s}}$$

En donde *Q(s)* es la transformada de *q(t).* Como estamos suponiendo que la carga inicial del capacitor es 0, y la corriente del sistema incialmente es nula, esto es $\mathrm{q}(0) = 0$, $\dot{\mathrm{q}}(0) = 0$ y $\mathrm{i}(0) = 0$ entonces la anterior se reduce a:

$$(\mathrm{s}^2 + 160\mathrm{s} + 10^4)\mathrm{Q(s)} = \frac{20}{\mathrm{s}}$$

Ahora bien, despejando *Q(s)* y luego aplicando fracciones simples, logramos obtener:

$$\mathrm{Q(s)} = \frac{20}{\mathrm{s}\,(\mathrm{s}^2 + 160\mathrm{s} + 10^4)}$$

$$\mathrm{Q(s)} = \frac{\frac{1}{500}}{\mathrm{s}} - \frac{1}{500}\,\frac{\mathrm{s}+160}{(\mathrm{s}^2 + 160\mathrm{s} + 10^4)}$$

$$\mathrm{Q(s)} = \frac{1}{500}\left[\frac{1}{\mathrm{s}} - \frac{(\mathrm{s}+80) + \frac{4}{3}(60)}{(\mathrm{s}+80)^2 + (60)^2}\right]$$

$$\mathrm{Q(s)} = \frac{1}{500}\left[\frac{1}{\mathrm{s}} - \left[\frac{\mathrm{s} + \frac{4}{3}\times 60}{(\mathrm{s})^2 + (60)^2}\right]_{\mathrm{s}\,\to\,\mathrm{s}+80}\right]$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Laplace, y haciendo uso del Teorema 1 antes mencionado (Teorema de traslacion), obtenemos la expresion que nos permite conocer la carga *q(t)* del capacitor, dada por:

$$\mathrm{q(t)} = \frac{1}{500}\left(1 - \mathrm{e}^{-80\mathrm{t}}\cos(60\mathrm{t}) - \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-80\mathrm{t}}\,\mathrm{sen}(60\mathrm{t})\right) \qquad (5)$$

Entonces, dada la definicion de corriente *i(t)* dada por (1), resultara que la corriente resultante en el circuito será:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3}\, e^{-80t}\, \mathrm{sen}(60t) \qquad (6)$$

Finalmente, y gracias a la herramienta de transformada de Laplace, pudimos encontrar sendas expresiones para las incognitas planteadas en el problema, a saber, la carga en el capacitor y la intensidade corriente en el circuito para un tiempo $t > 0$, expresadas por (5) y (6) respectivamente.

IV. Conclusiones

Pudimos observar como el uso de las transformadas de Laplace nos permitió resolver, de manera fácil, mecánica y rápida, las ecuaciones diferenciales convirtiéndolas a ecuaciones algebraicas en el plano S, y más aun, en el campo de la electrónica, nos permitió obtener las incógnitas buscadas de un circuito RLC.

Asimismo, dado que se tienen las condiciones iniciales en un circuito RLC, es más fácil pasar el circuito al plano S, e incorporar dichas condiciones iniciales. Así, esta herramienta nos permite comprender el comportamiento de este tipo de circuitos electrónicos.

Referencias

[1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002, pp. 130-135

[2] M. R. Spiegel, *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, Prentice-Hall Hispanoamericana, tercera edición, 1983, pp. 82-87

[3] M. Braun, *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1990, pp. 171-172

[4] G. Calandrini, *Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja*, 1er. Cuatrimestre 2011, pp. 61

[5] Universidad Autónoma Metropolitana, [internet], *Ecuaciones Diferenciales: Técnicas de solución y Aplicaciones*, disponible en: http://www.uamenlinea.uam.mx/materiales/matematicas/ec_dif/BECERRIL_ESPINOSA_JOSE_VENTURA_Ecuaciones_diferenciales_tecn.pdf [acceso el 11 de abril de 2012], pp. 208-210

[6] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Resistor, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Resistor [acceso el 11 de abril de 2012]

[7] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Condensador, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Condensador_el%C3%A9ctrico [acceso el 11 de abril de 2012]

[8] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Inductor, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Inductor [acceso el 11 de abril de 2012]

[9] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 24 de julio de 2010].