Transformada de Laplace en circuito RLC
Funciones de Variable Compleja

Christian D. Hansen

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
ruso5.22@hotmaill.autor

Agosto 2013

Resumen: En este informe se mostrara el uso de la Transformada de Laplace, en la resolución de ecuaciones diferenciales, para un circuito eléctrico RLC, formado por un resistor (R), un capacitor (C) y un inductor (L), de manera sencilla. Pretendiendo simplificar el tiempo y la complejidad de cálculos que generalmente se harían si no se utiliza este método.

Palabras clave: Transformada de Laplace, circuito eléctrico RLC.

I. INTRODUCCIÓN

Es necesario tener un conocimiento previo en el área de la matemática y la eléctrica antes de resolver las ecuaciones diferenciales por medio de la Transformada de Laplace. Por esto, primero se hará mención a las propiedades matemáticas que se aplicarán y los componentes que conforman este circuito eléctrico para una mejor comprensión del problema.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. *Transformada de Laplace*

La Transformada de Laplace es una herramienta muy poderosa para la resolución de circuitos RCL. La ecuación diferencial que está en el dominio del tiempo, mediante la Transformada de Laplace pasa al dominio en campo s, dominio de Laplace. Una vez resuelto, efectuando las respectivas operaciones algebraicas, se aplica la Transformada Inversa de Laplace para obtener la respuesta en el domino del tiempo.

Las técnicas de Transformada de Laplace son muy útiles para resolver ecuaciones con condiciones iniciales.

Definición de la Transformada de Laplace, de una función *f(t):*

$$F(s) = \mathrm{L}\left\{ f(t) \right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Algunas propiedades de la Transformada de Laplace a utilizarse:

- Linealidad:

$$\mathrm{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} = a\mathrm{L}\left\{ f(t)\right\} + b\mathrm{L}\left\{g(t)\right\}$$

- Derivación:

$$\mathrm{L}\{ f'(t)\} = s\mathrm{L}\{ f(t)\} - f(0)$$
$$\mathrm{L}\{ f''(t)\} = s^2\mathrm{L}\{ f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathrm{L}\left\{ f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathrm{L}\{ f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) = s^n\mathrm{L}\{ f(t)\} - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

- Desplazamiento en frecuencia:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$$

B. Circuitos eléctricos

Un circuito es una red eléctrica que contiene al menos una trayectoria cerrada. Los circuitos que contienen solo fuentes, componentes lineales (resistores, condensadores, inductores) y elementos de distribución lineales (líneas de transmisión o cables) pueden analizarse por métodos algebraicos para determinar su comportamiento en corriente directa o en corriente alterna. Un circuito que tiene componentes electrónicos es denominado un circuito electrónico. Estas redes son generalmente no lineales y requieren diseños y herramientas de análisis mucho más complejos.

Un circuito RLC es un circuito lineal que contiene una resistencia eléctrica, una bobina (inductancia) y un condensador (capacitancia).

Existen dos tipos de circuitos RLC, en serie o en paralelo, según la interconexión de los tres tipos de componentes. El comportamiento de un circuito RLC se describen generalmente por una ecuación diferencial de segundo orden.

Circuito RLC en serie:

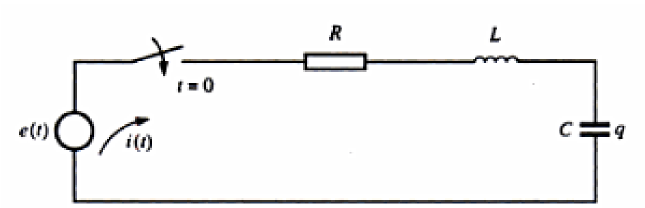

Figura 1: circuito RLC en serie.

Donde:

- R es el resistor (que tiene resistencia R, medida en ohms Ω).
- L es el inductor (que tiene inductancia L, medida en henrys *H*).
- C es el capacitor (que tiene capacitancia C, medida en farads *F*).
- *i(t)* es la corriente que fluye por el circuito.
- *q* es la carga del capacitor.
- *e(t)* es la fuente de voltaje.

Las leyes fundamentales que rigen en cualquier circuito eléctrico son:

- **Ley de corriente de Kirchhoff**: *La suma de las corrientes que entran por un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen por ese nodo.*
- **Ley de tensiones de Kirchhoff**: *La suma de las tensiones en un lazo cerrado debe ser cero.*
- **Ley de Ohm**: *La tensión en una resistencia es igual al producto del valor de dicha resistencia por la corriente que fluye a través de ella.*

La relación entre el flujo de corriente de un circuito y la carga *q(t)* está dado por:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1)$$

Y las relaciones entre el flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje *v(t)* a través de la resistencia y del capacitor en el tiempo *t* son:

- Caída de voltaje a través de la resistencia = Ri *(2)*
- Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{C}\int i dt = \frac{q}{C}$ (3)

C. *Resolución de circuito RLC con Transformada de Laplace*

Para analizar un circuito RCL usando la transformada de Laplace hay dos métodos:

- Escribir las ecuaciones temporales, aplicar la transformada de Laplace, resolver en el dominio de Laplace y finalmente volver al dominio del tiempo usando la transformada inversa.
- Escribir el circuito equivalente en el dominio de Laplace y resolver directamente en él (con atención a las condiciones iniciales).

Consideremos un circuito RLC en serie. El cual antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determinaremos la carga *q(t)* en el capacitor y la corriente resultante *i(t)* en el tiempo *t* sabiendo que $R = 160\Omega$, L = 1*H*, C = $10^{-4}F$ y *e(t)* = 20*V*.

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$Ri + L\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = e(t) \qquad (4)$$

<u>Primer método:</u>

Utilizando la ecuación (1)

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Sustituyendo los valores de R, L, C y *e(t)* da

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

Aplicando Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación llegamos a

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = [sq(0) + \dot{q}(0)] + 160q(0) + \frac{20}{s}$$

donde *Q(s)* es la transformada de *q(t)* y estamos suponiendo a $q(0) = 0$ y $q'(0)=0$, así que se reduce a

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = \frac{20}{s}$$

esto es

$$Q(s) = \frac{20}{s(s^2 + 160s + 10^4)}$$

Desarrollando en fracciones simples

$$Q(s)=\frac{1}{500}\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+80)+\frac{4}{3}(60)}{(s+80)^2+(60)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{500}\left[\frac{1}{s}-\left[\frac{(s)+\frac{4}{3}(60)}{(s)^2+(60)^2}\right]_{s\to s+80}\right]$$

Aplicando la Transformada Inversa y usando la propiedad de traslación

$$q(t)=\frac{1}{500}\left[1-e^{-80t}\cos(60t)-\frac{4}{3}e^{-80t}sen(60t)\right]$$

Entonces, la corriente resultante en el circuito *i(t)* está dada por

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{1}{3}e^{-80t}sen(60t)$$

<u>Segundo método:</u>

Podemos determinar la corriente aplicando la Transformada de Laplace en la ecuación (4) y sustituyendo los valores dados para L, R, C y *e(t)*

$$160I(s)+sI(s)+\frac{10^4}{s}I(s)=\frac{20}{s}$$

$$I(s)=\frac{20}{(s^2+80)^2+60^2}=sQ(s)$$ (puesto que *q(0)=0)*

La cual, aplicando la Transformada Inversa, da como antes

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{1}{3}e^{-80t}sen(60t)$$

En conclusión la Transformada de Laplace es un método muy sencillo y práctico a la hora de analizar un circuito eléctrico.

D. Referencias

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.
[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki, [acceso el 12 de agosto de 2013].